2^{nde} 1 ~ Mathématiques ~ Dernier DS de l'année 21 mai 2006 ~ Simulation, trigo, espace, triangles, fonctions

NB : le barème est provisoire.

<u>Exercice 1</u> (1,5 points) Sur « mon trajet » il y a deux feux bicolores (« rouge » ou « vert », on « négligera » le « orange » !) notés A et B (dans cet ordre).
Quand A est vert, alors deux fois sur trois B l'est aussi. Quand A est rouge, alors B est aussi souvent vert que rouge.
Quant au feu A il est 2 fois plus souvent vert que rouge.
Comment peut-on simuler cette expérience aléatoire « mon trajet », à l'aide d'un dé et d'une pièce de monnaie. (*La méthode est à votre convenance, mais doit être clairement expliquée*)

<u>Exercice 2</u> (1 point) On veut simuler le tirage d'une boule dans une urne qui contient exactement 5 boules : une Rouge (R), une Blanche (B), une Verte (V) et deux Noires (N). On utilise un générateur de nombres aléatoires. On choisit le $3^{ème}$ chiffre de ce nombre et on décide : «Il est inférieur ou égal à 2 » correspond à R, « Il est dans {3,4} » correspond à B, « Il est dans {5 ;6} » correspond à V et «Il est supérieur ou égal à 7 » correspond à N. **Dire ce qui ne va pas** !

<u>Exercice 3</u> (3 points) **a-** Donner avec quelques explications la valeur exacte de $\cos(\frac{41\pi}{3})$

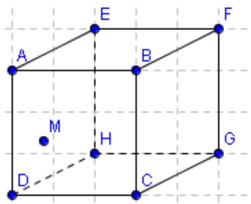
b- On vous dit que le réel α est tel que sinα = 0,4 et que son cosinus est négatif. Observez un cercle trigonométrique (vous placerez le réel α sur ce cercle) et donner une valeur approchée de cosα. Calculer ensuite la valeur exacte de cosα. (Rappel : pour x réel, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.)

<u>Exercice 4</u> (6 points) ABC est un triangle. P et Q sont deux points du segment [BC] et les 4 points B, P, Q et C sont dans cet ordre. M est un point du côté [AB] et N un point du côté [AC] tels que PMNQ soit un rectangle.

1- Dans cette question on suppose que ABC est isocèle en A. Montrer que BP = QC.
2- On se propose d'établir la réciproque du théorème précédent, c'est à dire : « si BP = QC alors le triangle ABC est isocèle en A ».
   a- On suppose BP = QC. Montrer que les triangles BPM et QCN sont isométriques.
   b- Conclure.

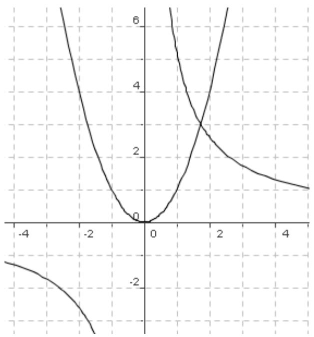
<u>Exercice 5</u> (1 point) « Si deux triangles isocèles ont un angle en commun, alors ils sont semblables ». Vrai ? Faux ? Preuve !

<u>Exercice 6</u> (5,5 points)
ABCDEFGH est un cube.



1- On se propose d'établir que la droite (AG) est orthogonale au plan (DBE).
Je vous rappelle deux propriétés de géométrie dans l'espace :
(*19) Si une droite D et un plan P sont orthogonaux, a » alors la droite D est orthogonale à toute droite du plan P.*
(20) Si une droite D est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P alors elle est orthogonale à ce plan.
   a- Etablir que les droites (EB) et (AG) sont orthogonales.
   b- Une démonstration analogue (***nous ne le ferons pas*** !) montrerait que les droites (AG) et (BD) sont orthogonales. Conclure.
2- Reproduire le cube (ABCDEFGH) et ajouter un point M de la face (ABCD).
Tracer la section du cube (ABCDEFGH) par le plan (AMG). (On laissera les constructions apparentes ou on fera un commentaire)

<u>Exercice 7</u> (2 points) La courbe de la fonction carrée coupe l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ (a désigne un réel) en un point A d'ordonnée 3 (voir schéma ci-contre correspondant au cas particulier où a est strictement positif). Calculer la valeur exacte du réel a.



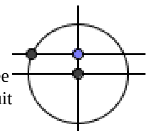
Par simple lecture du schéma donné (on suppose donc a 0) ci-contre donner les solutions de l'inéquation $x^2 \leq \frac{a}{x}$

2^{nde} 1 ~ Mathématiques ~ Correction du dernier DS de l'année ~ 22 mai 2006

<u>Exercice 1</u> Par exemple, on peut lancer le dé pour simuler le feu A (1 ou 2 pour « Rouge » et les autres faces pour « Vert »). Si ce dé donne 1 ou 2, on le relance pour simuler le feu B (avec les mêmes conventions).
Si le dé a donné 3, 4, 5 ou 6 on lance la pièce pour simuler le feu B qui est aussi souvent Vert que Rouge.

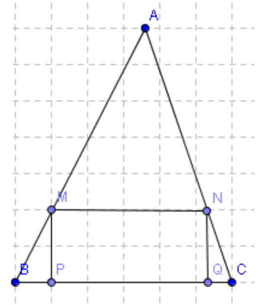
<u>Exercice 2</u>
Cette simulation n'est pas correcte car elle n'utilise pas le même modèle que le tirage : les trois couleurs R, B, V doivent pouvoir apparaître aussi souvent l'une que l'autre. Ici « inférieur ou égal à 2 » contient 3 possibilités alors que les autres n'en contiennent que 2.[de plus «Il est supérieur ou égal à 7 » devrait contenir 4 possibilités et n'en contient que 3 (7, 8 et 9)]. NB : Le fait de choisir le $3^{ème}$ chiffre n'a aucune incidence.

<u>Exercice 3</u> **a-** **V**aleur exacte de $\cos(\frac{41\pi}{3})$: $\frac{41\pi}{3}$ peut s'écrire : $7\times2\times3\times\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$ c'est à dire $7\times2\pi - \frac{\pi}{3}$. On a donc :
$\cos(\frac{41\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} =.\frac{1}{2}$



b- On vous dit que le réel α est tel que sinα = 0,3 et que son cosinus est négatif. Sur le cercle trigonométrique on place le point d'ordonnée 0,4 et d'abscisse négative. Une valeur approchée de cosα est l'ordonnée ce point. On lit environ 0,9. Pour le réel α on a : $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ Donc $\cos^2\alpha = 0,84$ et comme cosα < 0 on en déduit $\cos\alpha = -\sqrt{0,84}$

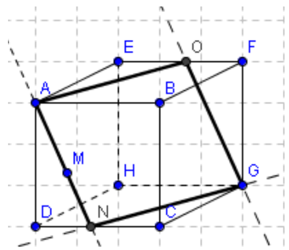
<u>Exercice 4</u> ABC est un triangle. P et Q sont deux points du segment [BC] et les 4 points A, P, Q et C sont dans cet ordre. M est un point du côté [AB] et N un point du côté [AC] tels que PMNQ soit un rectangle.



3- ABC est isocèle en A. Montrons que les deux triangles BPM et CQN sont isométriques.
Ces deux triangles sont rectangles en P et Q, car PMNQ est un rectangle. Les angles de sommet B et C sont égaux car ABC est isocèle. On en déduit que les troisièmes angles (de sommet M et N) sont égaux (somme des angles d'un triangle). De plus les côtés [PM] et [QN] ont même longueur (côtés opposés du rectangle PMNQ). Alors ces deux triangles ont bien « un côté entre deux angles » (PM et QN et leurs angles adjacents) et sont donc isométriques. On en déduit que les côtés [BP] et [QC] ont même longueur. BP = QC.
4- a- si BP = QC les deux triangles rectangles BPM et QCN ont deux côtés de même longueur (chacun à chacun). Le troisième côté étant l'hypoténuse, il est également de même longueur dans ces deux triangles (théorème de Pythagore). les triangles BPM et QCN sont donc isométriques (« 3 côtés de même longueur, chacun à chacun »).
b- On en déduit que les angles homologues $\widehat{MBP}$ et $\widehat{NCQ}$ sont égaux, ce qui établit que ABC est isocèle en A.

<u>Exercice 5</u> « Si deux triangles isocèles ont un angle en commun, alors ils sont semblables ». Évidemment faux ! (voir C.L. !!) Un contre exemple : Un triangle a pour angles : 120°, 30° et 30° et l'autre 30°, 75° et 75°.

<u>Exercice 6</u>



1- a- Pour établir que les droites (EB) et (AG) sont orthogonales, nous allons montrer que la droite (EB) est orthogonale au plan (AFG). Pour cela il suffit de trouver deux droites de ce plan orthogonales à (EB) [prop 20]. (AF) convient car (AF) et (EB) sont les diagonales du carré (ABFE). (FG) également car elle est orthogonale au plan (ABFE) [propriété du cube ou bien elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan (EF) et (BF) puis prop 20] La propriété 20 permet de conclure que (EB) ⊥ (AFB). La prop 19 permet de conclure que (EB) ⊥ (AG).
   b- De même on montrerait que les droites (AG) et (BD) sont orthogonales. La prop 20 permet de conclure que (EBD) ⊥ (AG).
2- Le tracé de (AM) donne N, puis on trace (NG). Pour obtenir O on peut tracer la parallèle à (AN) qui passe par G [bien voir pourquoi]. On termine avec (AO).

<u>Exercice 7</u> La courbe de la fonction carrée coupe l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ en un point A d'ordonnée 3 et d'abscisse α. Ce réel vérifie $\alpha^2 = 3$ car le point A est sur la parabole. On en déduit que $\alpha = \sqrt{3}$ ou $\alpha = -\sqrt{3}$. Le point A est aussi sur l'hyperbole, le réel a vérifie alors : $3 = \frac{a}{\alpha}$ ce qui donne $a = 3\alpha$. Le réel a peut donc prendre deux valeurs $3\sqrt{3}$ ou $-3\sqrt{3}$

Par simple lecture du schéma donné les solutions de l'inéquation $x^2 \leq \frac{a}{x}$ sont les réels de l'intervalle $]0 ; \sqrt{3}]$ car $\sqrt{3}$ est l'abscisse du point A.