2^{nde} 1 ~ Mathématiques ~ DS1 fait en classe le 3 octobre 2005 ~ 1 h.

Exercice 1 *(3 points)*

On note T le réel $T = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Calculer de $T^2 + T$. Utiliser votre résultat (très simple !) pour exprimer le carré du réel T sous la forme $aT + b$ où a et b désignent deux entiers relatifs à déterminer. En déduire alors l'écriture de T^3 sous une forme analogue (c'est à dire « $aT + b$ »)

Exercice 2 *(4,5 points (3 fois 1,5))*

Voici deux affirmations (deux « conjectures »). Etablir si elles sont vraies ou fausses. (seule la preuve m'intéresse !)

a- Pour tout entier naturel n on a : $3^n + 3^{n+2}$ est un multiple de 10.

b- Si l'entier n est premier alors il en est de même pour l'entier $2n + 1$.

c- Si l'entier d est un diviseur commun aux deux entiers a et b, alors d est un diviseur de l'entier a+b.

Exercice 3 *(0,5+0,5+ 0,5+ 0,5+ 2 points)*

[aux questions a,b, c et d, vous ne donnerez aucune justification, seulement le résultat ... dans une phrase !]

a- Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier : 264.

b- On pose $n = 2^3 \times 11^2 \times 13$ et $p = 2 \times 3^2 \times 22$. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du PGCD de ces deux nombres ?

c- Par quel entier (le plus petit possible) doit-on multiplier le carré de n (avec encore $n = 2^3 \times 11^2 \times 13$) pour obtenir un « cube parfait » (*c'est à dire un entier qui soit cube d'un entier*)

d- Proposer un nombre **rationnel, compris entre 0 et 1**, dont le produit par n (avec encore $n = 2^3 \times 11^2 \times 13$) soit un carré parfait.

e- les entiers suivants sont-ils premiers ? (**on donnera chaque fois une justification en plus de la réponse** !!) : A = 876 543 B = 527 C = 359

Exercice 4 *(2 points)*

Simplifier l'écriture du nombre suivants puis écrivez le sous forme de fraction irréductible !

$E = \frac{(-35)^3 \times 6^4}{14^5 \times 15^2}$ Que pense votre calculatrice du résultat que vous proposez ?

Exercice 5 *(3 points)*

a- a désigne un nombre réel, que pensez-vous de l'écriture $\sqrt{a^2} + \sqrt{(-a)^2}$?

b- Ecrire plus simplement (a et b désignent des réels non nuls): $G = \frac{a^2 + (ab)^2}{(ab)^2}$

Exercice 6 *(3,5 points)*

Pour p entier naturel, on pose $R = (2p - \sqrt{p})^2 - 4p(p - \sqrt{p})$.

1- Calculez rapidement R quand p = 1 puis quand p = 4. Observez que la valeur de R dépend « simplement » de celle de p. Pouvez-vous conjecturer la valeur de R en fonction de p.

2- Démontrer cette conjecture.

2^{nde} 1 ~ Mathématiques ~ Correction du DS1 fait en classe le 3 octobre 2005 ~ 1 h.

Exercice 1

Calculons $T^2 + T$: $T^2+T = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} + \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = 1$. On en déduit que $\boxed{T^2 = -T+1}$.

En multipliant les deux membres par T on obtient : $T^3 = -T^2 + T$ et en remplaçant T^2 par $-T+1$ on obtient : $T^3 = -(-T+1) + T$ c'est à dire $\boxed{T^3 = 2T - 1}$.

Exercice 2

a- Soit n un entier naturel. On a : $3^n + 3^{n+2} = 3^n(1 + 3^2) = 10 \times 3^n$. 3^n étant entier, on a bien établi que pour tout entier naturel n on a : $3^n + 3^{n+2}$ est un multiple de 10.

b- Si l'entier n est premier alors il en est de même pour l'entier $2n + 1$. Cette conjecture est fausse car (par exemple)7 est premier mais $2\times7 + 1 = 15$ ne l'est pas !

c- Soit a et b deux entiers et d un diviseur commun aux deux entiers a et b, alors il existe un entier q tel que $a = d\times q$ et un entier q' tel que $b = d\times q'$. Ainsi a+b s'écrit d(q+q') ce qui prouve que d divise a+b car q+q' est entier. Nous avons bien établi que Si l'entier d est un diviseur commun aux deux entiers a et b, alors d est un diviseur de l'entier a+b.

Exercice 3

a- Décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier : $264 = \boxed{2^3\times3\times11}$

b- On pose $n = 2^3 \times 11^2 \times 13$ et $p = 2 \times 3^2 \times 22$. Attention p n'est pas écrit sous forme d'un produit de facteurs premiers $p = 2^2 \times 3^2 \times 11$. La décomposition en produit de facteurs premiers du PGCD de ces deux nombres est alors $\boxed{2^2\times11}$

c- le carré de n (avec encore $n = 2^3 \times 11^2 \times 13$) est $2^6 \times 11^4 \times 13^2$ pour obtenir un « cube parfait » , il suffit de multiplier par $\boxed{11^2\times13}$.

d- Un nombre **rationnel, compris entre 0 et 1**, dont le produit par n (avec encore $n = 2^3 \times 11^2 \times 13$) soit un carré parfait est $\boxed{2/13}$. (on doit pouvoir en trouver d'autres !!)

e- les entiers suivants sont-ils premiers A = 876 543 est un multiple de 3 (somme de ses chiffres) donc A n'est pas premier. B = 527 n'est pas premier car il s'écrit 17×31. C = 359 est premier. Pour l'établir on essaie successivement (et sans succès) les entiers premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7, 11 ; 13 ; 17 ; 19. Le quotient par 19 est inférieur à 19 donc il est inutile d'aller plus loin (ou bien, si vous préférez, 359 est inférieur au carré de 19).

Exercice 4 Cherchons des « simplifications » (avant d'effectuer les calculs)

$\frac{(-35)^3 \times 6^4}{14^5 \times 15^2} = \frac{(-7\times5)^3 \times (2\times3)^4}{(2\times7)^5 \times (3\times5)^2} = \frac{-7^3\times5^3\times2^4\times3^4}{2^5\times7^5\times3^2\times5^2} = \frac{-5\times3^2}{2\times7^2} = \boxed{-\frac{45}{98}}$ NB : on peut tenter de vérifier à la machine que le résultat obtenu n'est pas absurde : le calcul initial et le résultat final donnent tous deux environ -0,459.

Exercice 5

a désigne un nombre réel, l'écriture $\sqrt{a^2} + \sqrt{(-a)^2}$ désigne le réel 2a si a est positif et -2a si a est négatif. En effet les deux écritures $\sqrt{a^2}$ et $\sqrt{(-a)^2}$ désignent le même nombre (a si $a \geq 0$ et $-a$ si $a \leq 0$).

b- Pour écrire plus simplement $G = \frac{a^2 + (ab)^2}{(ab)^2}$ il est indispensable de commencer par factoriser le numérateur : $G = \frac{a^2(1+b^2)}{a^2b^2} = \frac{1+b^2}{b^2}$ qui ne se simplifie pas.

Exercice 6

Pour p entier naturel, on pose $R = (2p - \sqrt{p})^2 - 4p(p - \sqrt{p})$.

Quand on calcule pour p = 1 puis 4 (à la main !!) on trouve 1 puis 4. On peut conjecturer (c'est un peu « rapide » mais l'énoncé nous y invite !) que pour tout entier naturel p on a R = p.

Démontrons cette conjecture :

Soit p un entier naturel. $R = (2p - \sqrt{p})^2 - 4p(p - \sqrt{p}) = [4p^2 - 4p\sqrt{p} + p] - [4p^2 - 4p\sqrt{p}] = p$. La conjecture est établie.