

Exercice 1 (3 points)

On pose $\phi = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

- 1- Ecrire ϕ^2 sous une forme voisine de celle de ϕ .
- 2- Calculer $\phi^2 - \phi$ et en déduire une relation simple donnant ϕ^2 en fonction de ϕ .
- 3- Déduire du 2- une relation donnant ϕ^3 en fonction de ϕ^2 et ϕ , puis en fonction de ϕ seulement.

Exercice 2 (2,5 points)

- 1- Les entiers naturels suivants sont-ils premiers : 747 ? 275 ? 173 ? (*Chaque fois, donner une justification ne faisant pas intervenir la calculatrice*)
- 2- On note n l'entier $n = 60\,368$.
 - a- Décomposer n en produit de facteurs premiers.
 - b- Sans en faire la liste, pouvez-vous déterminer le nombre de diviseurs de l'entier n ?
(NB : on pourra s'aider d'un arbre)

Exercice 3 (1,5 points)

On vous dit que $A = 17^3 \times 11^2 \times 3^2$ et $B = 19^5 \times 11 \times 3^3 \times 2^4$. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du PGCD de A et B, agrémentée de quelques explications.

Exercice 4 (3,5 points)

Pour p entier naturel, on pose $R = (2p - \sqrt{p})^2 - 4p(p - \sqrt{p})$.

- 1- Calculez rapidement R quand $p = 1$ puis quand $p = 4$. Observez que la valeur de R dépend « simplement » de celle de p . Pouvez-vous conjecturer la valeur de R en fonction de p .
- 2- Démontrer cette conjecture.

Exercice 5 (1,5 points) (*On utilisera la calculatrice*)

On pose $A = (\pi - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - 1)$. Le nombre A est-il inférieur ou supérieur à son carré A^2 ? Donner une explication qui vous permette de répondre sans calculer une valeur approchée de A^2 .

Exercice 6 (3,5 points)

Voici deux propositions (indépendantes). Dire si elles sont vraies ou fausses puis en établir la preuve.
Proposition A : « Pour tout entier naturel non nul n , le nombre $(2n + 3)^2 - 4n$ n'est pas premier. »
Proposition B : « Pour tout entier naturel p , le nombre $(3p + 1)^2 + p + 2$ est premier. »

Exercice 7 (4,5 points) (*Cadeau (??) cet exercice ne requiert que très peu de connaissance*)

Des cartons d'emballage ont la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions $60 \times 80 \times 60$. On les met en pile, tous dans la même position. Il y a donc deux hauteurs possibles pour un carton : 60 cm ou 80 cm, et donc deux types de piles de carton. Dans un cas on peut faire des piles de 9 cartons mais pas de 10. Dans l'autre cas, on peut faire des piles de 13 cartons, mais pas de 14.

On note h la hauteur entre le sol et le plafond de l'entrepôt où sont empilés ces cartons.

- 1- Trouver deux encadrements de h (*merci de distinguer $<$ et \leq*)
- 2- Déduire du 1- un troisième encadrement de h meilleur que les deux premiers, dont vous déduirez ensuite une valeur approchée de h à 10 cm près !!!!