Correction du DS 2 fait en classe le 7 novembre 05

Exercice 1 1- Le carré de $2 - \sqrt{5}$ s'écrit : $9 - 4\sqrt{5}$ 2- Les 2 nombres $2 - \sqrt{5}$ et $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ ont le même carré mais le premier est négatif ($4\sqrt{5}$ est supérieur à 9) alors que le deuxième est positif (c'est un radical !). Ces deux nombres sont donc opposés. On en déduit (3-) que leur distance est le double du positif (ou plutôt ici, l'opposé du double du négatif) c'est donc : $4 - 2\sqrt{5}$.

Exercice 2

1- Sachant que x est minoré par 2, On peut écrire $x \geq 2$. On multiplie les deux membres par -2 (négatif !) on obtient alors $-4 \geq -2x$. Il reste à ajouter 3 aux deux membres et on obtient $-1 \geq -2x + 3$. **Le réel $3 - 2x$ est donc majoré par -1**
 2- x est un réel supérieur ou égal à 2. On factorise $B - A$. $B - A = (x - 2)^2 - (x - 1)^2 = (x - 2 + x - 1)(x - 2 - x + 1) = -(2x - 3) = -2x + 3$. Pour comparer A et B il suffit de regarder le signe de la différence $B - A$. On a vu à la question 1- que pour $x \geq 2$ on avait $-2x + 3 \leq -1$. ce qui permet d'affirmer que $-2x + 3$ **est négatif**. on peut alors conclure : **pour $x \geq 2$ on a $A > B$** . (NB : on ne sait rien de ces deux nombres quand $x \leq 2$!!. On peut vérifier qu'on n'a pas fait une erreur grossière en donnant à x une valeur simple, par exemple avec $x = 3$ on a : $A = 4$ et $B = 1$ On a bien ici $A > B$.)

Exercice 3 x est un réel strictement supérieur à 3.

1- Le réel x est dans l'intervalle $]3 ; +\infty[$ 2- son carré x^2 est donc dans $]9 ; +\infty[$ car x et 3 sont positif (air connu !)
 3- son inverse $1/x$ est dans $]1/3 ; 0[$ pour deux raisons $1/x < 1/3$ car x et 3 sont strictement positifs (air connu !) mais ne perdons pas de vue que x étant strictement positif, il en est de même pour son inverse !.

Exercice 4

Pour écrire sans utiliser les barres de la valeur absolue il suffit d'observer le signe du nombre entre les barres. Ici ils sont tous les 3 négatifs. En effet $\pi < 4$ pour le premier ! Pour le second, nous avons une somme de deux négatifs. Seul le $3^{\text{ème}}$ n'est pas évident. On peut utiliser une calculatrice ou faire un calcul mental approché : $(\pi - \sqrt{2})$ est strictement supérieur à 1 (évident ??) donc son carré aussi et par suite $\dots 1 - (\pi - \sqrt{2})^2$ est négatif. D'où les résultats :

$$A = |\pi - 4| = 4 - \pi \qquad B = |-2 - \sqrt{2}| = 2 + \sqrt{2} \qquad C = |1 - (\pi - \sqrt{2})^2| = (\pi - \sqrt{2})^2 - 1$$

Exercice 5 (3 point) Les réels x qui vérifient $|x+2| \leq 3$ sont tels que la distance entre x et -2 est inférieure ou égal à 3.

L'observation d'un schéma donne : $x \in [-5 ; 1]$

De même les réels x tels que $|x - 5| > 2$ sont les réels qui ne sont pas dans l'intervalle $[3 ; 7]$. On a donc $x \in]-\infty ; 3[\cup]7 ; +\infty[$.

Exercice 6 On note T le réel $T = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1- Encadrons T, sachant que $2 < \sqrt{5} < 3$: On encadre d'abord $\sqrt{5} - 1$ puis on divise par 2. On obtient : $1/2 < T < 1$. On en déduit $1/4 < T^2 < 1$ (passage au carré pour des réels strictement positifs.)
 2- Le calcul de $T^2 + T$ a été fait dans le DS1 ! On trouve 1. On peut alors exprimer le carré du réel T : $T^2 = -T + 1$.
 3- Un nouvel encadrement de T^2 s'obtient en partant de celui de T, en passant aux opposés, et en ajoutant 1. L'encadrement final est donc : $0 < T^2 < 1/2$.
 4- En combinant les deux encadrements de T^2 on obtient un 3ème encadrement meilleur que les deux précédents : $1/4 < T^2 < 1/2$ (si vous ne le voyez pas bien faites un schéma où apparaissent les points d'abscisse 0 ; 1/4 ; 1/2 et 1.)

Exercice 7

La phrase suivante : « Si on augmente de 1 le numérateur (positif) et le dénominateur (positif) d'un rationnel strictement positif, ce rationnel augmente. » est fautive ! Cela se prouve à l'aide d'un contre exemple, par exemple $3/2$ devient $4/3$ qui est inférieur à $3/2$. Mais on n'est pas obligé de le voir au premier coup d'œil. On peut chercher à comparer a/b et $(a+1)/(b+1)$ avec la seule condition : a et b strictement positifs. Pour cela on étudie la différence de ces deux rationnels. $(a+1)/(b+1) - a/b = (faites les calculs) = (b-a) / [b(b+1)]$. Il est clair que le dénominateur est positif et que la différence ne sera positive que si $b > a$, c'est à dire $b/a > 1$. La recherche d'un contre exemple est plus facile !

Exercice 8 L'ordre de grandeur du réel $A = \frac{\sqrt{0,4 \times 10^{-161}}}{1 - \pi \times 10^{-162}}$ est 2×10^{-81} . (évident ???)

Exercice 9 Pour simplifier l'écriture du réel $F = \frac{(2^9 \times 2^2)^3 \times 9^3}{6^7 \times 8^6}$, il suffit d'écrire tous les facteurs sous forme d'un produit de 2 ou de 3.. On obtient $F = 2^8/3$ c'est à dire $256/3$.

Exercice 10

x et y sont deux réels tels que $2 < x < 4$ et $-3 < y < -1$. On obtient les encadrements suivants : $1 < -y < 3$ (passage aux opposés, puis $2 < -xy < 12$ (produit membre à membre d'inégalités de même sens entre réels POSITIFS) et enfin $-12 < xy < -2$ (passage aux opposés.)