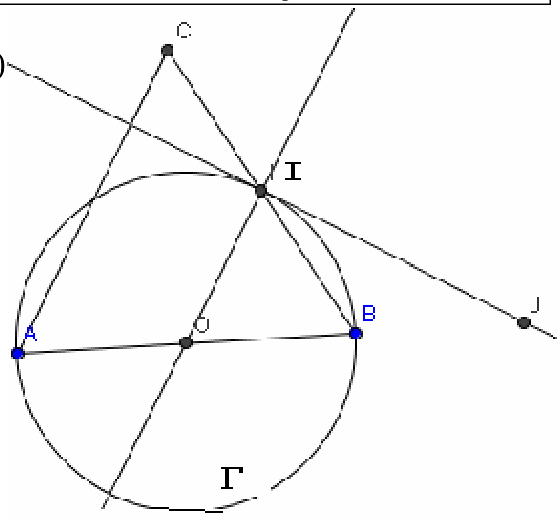
2^{nde} 1 ~ Mathématiques ~ CORRECTION rapide du DS N° 5 fait en classe le 26 janvier 06.

A- 1- Montrons que I est le milieu du segment [BC].



I est un point de Γ cercle de diamètre [AB] donc les droites ((AI) et (BC) sont perpendiculaires. Le triangle ABC étant équilatéral (donc « isocèle enA ») la hauteur issue de A est aussi la médiane issue de A et I est le milieu de [BC].

2- Pour montrer que les droites (OI) et (IJ) sont perpendiculaires, nous allons établir que le triangle OIJ est rectangle en I.
Nous savons que B est le milieu du segment [OI] (définition du point J par la symétrie de centre B) et que OB = BI car les points O et I sont les milieux des côtés du triangle équilatéral ABC. Le cercle de diamètre [OJ] passe donc par J, ce qui prouve que le triangle OIJ est rectangle en I. les droites (OI) et (IJ) sont donc perpendiculaires. La droite (IJ) passe par le point I du cercle Γ et est perpendiculaire au rayon (OA). Elle est donc tangente à Γ en A.

3- L'orthogonalité des droites (IJ) et (AC) est une conséquence de la question précédente. On sait que (IJ) est perpendiculaire à (OI) et (OI) est parallèle à (AC) en appliquant le théorème des milieux au triangle ABC, avec les milieux O et I. On peut conclure.

4- De nombreux chemins convergent vers la réponse à cette question :

a. Le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles OIJ et AIB.
b. Montrer que leqs angles IAB et IJA sont égaux à 30°
c. La médiatrice de[AJ] est aussi celle de [OB] (plus délicat !)

B- 1- Résoudre dans ℝ $\frac{x\sqrt{3}}{3} < \frac{2x+1}{3}$. C'est une inéquation du premier degré. On peut commencer par multiplier les deux membres par 3 et on obtient pour ensemble des solutions l'intervalle :]-($\sqrt{3}+2$) ; +∞ [.

2- résolution de l'inéquation : 1/x ≤ x Avant de commencer on peut déjà supposer x ≠ 0. Ensuite, on peut raisonner par équivalence :
1/x ≤ x ⇔ 1/x - x ≤ 0 ⇔ (1-x²)/x ≤ 0 ⇔ (1-x)(1+x)/x ≤ 0. A ce niveau, un tableau de signes s'impose.

x		-1		0		1	
1-x	+		+		+	0	-
1+x	-	0	+		+		+
x	-		-	0	+		+
(1-x)(1+x) / x	+	0	-	//	+	0	-

La simple lecture de ce tableau donne S = [-1 ; 0[∪ [1 ; +∞[

3- Il suffit de tracer la droite d'équation y = x. Au a- on trouve 1 et -1 (on lit les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite).(ce sont des valeurs exactes car l'énoncé précisait que f(1) = 1 et f(-1) = -1. Pour le b- On trouve les mêmes solutions qu'au 2- car la fonction f représentée ici n'est autre que la fonction x ↦ 1/x.

4- Résoudre dans ℝ l'inéquation : 2x(x² - 1) < x(1 – x). On peut noter ici que le premier membre peut encore se factoriser ! Cette équation se transforme en : x(x-1)[2(x+1) + 1] < 0 c'est à dire x(x-1)(2x+3)<0 Un tableau (faites le) permet de conclure S =]-∞ ; -3/2[∪]0 ; 1[.

5- Une inéquation dont l'ensemble des solutions soit l'intervalle :] -1/3 ; 2] pourrait être (x-2)/(3x+1) ≤ 0 (si vous ne voyez pas pourquoi, résolvez la !)

6- Résolution dans ℝ de l'équation : $\frac{3(x-2)}{4-x^2}-2=0$. On remarque tout de suite que x ne peut pas prendre les valeurs -2 et 2. Pour x différent de 2 et de -2 l'équation se transforme en 3(x-2) - 2(x-2)(x+2) = 0 puis par factorisation en (x-2)(-1-2x) = 0. Cette équation aurait deux solution 2 et -1/2 mais comme nous avons exclu la valeur 2, on a S = {-1/2}.

7- (<u>exercice supprimé</u>) Les réels dont le double est strictement supérieur au cube sont les solutions de l'inéquation 2x > x^3. Cette inéquation se résout par la méthode habituelle. On arrive à x(x²-2)< 0 c'est à dire x(x-$\sqrt{2}$)(x+$\sqrt{2}$) < 0 Ici aussi un tableau de signes s'impose et on arrive à la solution : les réels cherchés sont ceux des intervalles]-∞ : -$\sqrt{2}$ [et]0 ; $\sqrt{2}$ [.