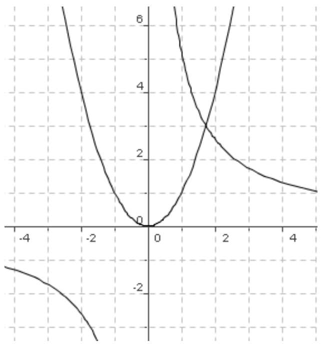
2^{nde} 15 ~ Mathématiques ~ DS N° 6 ~ fait en classe le 30 avril 2007 ~ 1h.

Exercice 1 (1 point) Factoriser : A = $9x^2 - 1 - (2x - 4)(3x - 1)$

Exercice 2 (1 + 2 + 1 points)



a désigne un réel strictement positif. Sur le schéma ci-contre on donne la courbe de la fonction carrée et l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{a}{x}$.

1- Par simple lecture du dessin donner une valeur approchée de « a » (***vous direz comment vous procédez***)

2- On vous dit maintenant que ces deux courbes se coupent en un point A d'ordonnée 3 et d'abscisse positive. Calculer la valeur exacte du réel a.

3- Par simple lecture du schéma donné ci-contre donner les solutions de l'inéquation $x^2 \le \dfrac{a}{x}$ (où <u>a est le réel</u> dont vous avez (*peut-être*) donné une valeur approchée au 1- et la valeur exacte au 2-)

Exercice 3 (1,5 + 3,5 point)

On se propose de résoudre l'équation $\dfrac{1}{x} = x - 2$ puis l'inéquation $\dfrac{1}{x} \le x - 2$.

1- Dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), tracer la courbe de la fonction inverse. Sur le même dessin tracer la droite qui vous permettra d'obtenir par simple lecture des valeurs approchées des solutions de l'équation proposée. Observez que l'équation admet exactement deux solutions que l'on notera x_1 et x_2. Lire alors une valeur approchée de x_1 et x_2

2- Nous cherchons maintenant **les valeurs exactes** de x_1 et x_2.

a. Développer le produit $(x + \sqrt{2} - 1)(x - \sqrt{2} - 1)$ et vérifier qu'il est égal à la somme : $x(x-2) - 1$

b. Transformer l'équation $\dfrac{1}{x} = x - 2$ en équation « produit » (*vous pourrez utiliser le résultat du a.*) puis la résoudre.

c. Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x} \le x - 2$.

Exercice 4 (2,5 points)

Décomposer la fonction f : $x \mapsto (1 - 2x)^2$ à l'aide d'un enchaînement de 2 fonctions de références (une fonction affine suivie de la fonction carré) et en déduire ses variations sur [2 ; 5].(*vous signalerez avec précision les propriétés des fonctions de référence que vous utiliserez*)

Exercice 5 (2,5 points) (**Reprises du DS 5**.)

a- On considère une famille de nombre composée de un « 1 », deux « 2 », trois « 3 » etc. jusqu'à onze « 11 ». À l'aide de votre machine calculez leur moyenne et leur médiane.(*Donner éventuellement une valeur approchée à 10^{-3} près*)

b- a est un réel. Dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) on donne les points A (5; 26) B(10 ; 46) et P (a ; 35). Pour quelle(s) valeur(s) du réel a les trois points A, B et P sont-ils alignés ?

Exercice 6 (1 + 1 + 1 points)

On se promène sur les arêtes et/ou les diagonales d'un carré ABCD. (on va d'un sommet à un autre, mais on ne reste pas sur place. Le choix de l'un des 3 sommets possibles se fait de façon aléatoire, sans privilégier l'une ou l'autre des possibilités) Par exemple, voici une promenade <u>de longueur 4</u> qui <u>part de A</u> et arrive en D : A $\mapsto$ B $\mapsto$ A $\mapsto$ C $\mapsto$ D. On considère désormais des promenades **partant de A et de longueur 2**.

a- Modéliser à l'aide d'un arbre une telle promenade.

b- D'après votre modélisation, quelle va être la situation la plus fréquente : « Ne se déplacer que sur des diagonales » ou « ne se déplacer que sur des côtés du carré » ? (*expliquez votre réponse*.)

c- Proposer une simulation de cette promenade utilisant un seul nombre aléatoire (écrit sous la forme d'un décimal compris entre 0 et 1). Dans le cas où ce nombre serait 0, 20757831, quelle serait la promenade obtenue avec VOTRE simulation.

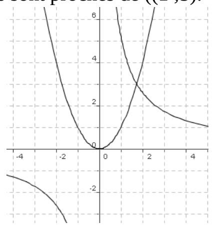
Exercice 7 (2 points): Calculer la moyenne (valeur exacte !) des nombres :

cos (0) ; cos(π/4) ; cos(2π/4) ; cos(3π/4) ; … ; cos(8π/4) (*on pourra aussi observer un cercle trigonométrique et remplacer quelques calculs par des explications)*)

2^{nde} 15 ~ Mathématiques ~ CORRECTION du DS N° 6, fait en classe le 30 avril 2007 ~ 1h.

Exercice 1 Factoriser. A = $9x^2 - 1 - (2x - 4)(3x - 1) = (3x-1)(3x+1) - (2x - 4)(3x - 1) = (3x - 1)(x + 5)$

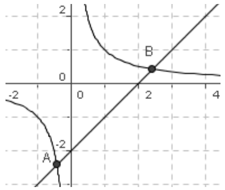
Exercice 2 1- On voit sur le dessin que l'hyperbole passe par un point dont les coordonnées sont proches de ((1 ;5). Le réel a vérifie donc approximativement 5 = a/1 c'est à dire a ≈ 5.



2-Ces deux courbes se coupent en un point A d'ordonnée 3.Comme A est sur la parabole son abscisse est $\sqrt{3}$. La valeur exacte du réel a est donc la solution de 3 = a / $\sqrt{3}$ c'est à dire a = 3 $\sqrt{3}$.

3- Par simple lecture du schéma les solutions de l'inéquation $x^2 \le \dfrac{a}{x}$ sont les réels de l'intervalle]0 ; $\sqrt{3}$]

Exercice 3 On se propose de résoudre l'équation $\dfrac{1}{x} = x - 2$ puis l'inéquation $\dfrac{1}{x} \le x - 2$.



1- Dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), on trace la courbe de la fonction inverse. Sur le même dessin on trace la droite d'équation y = x – 2.On voit que cette droite coupe l'hyperbole en deux points dont les abscisses sont $x_1 \approx -0{,}4$ et $x_2 \approx 2{,}4$. On lit ensuite les solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x} \le x - 2$: S = [x_1 ; 0[∪ [x_2 ; +∞[

a. On développe le produit $(x + \sqrt{2} - 1)(x - \sqrt{2} - 1)$ On trouve $x^2 - 2x - 1$ ce qui s'écrit aussi $x(x-2) - 1$. CQFD !

b. l'équation $\dfrac{1}{x} = x - 2$ s'écrit : (x-2) – 1/x = 0 c'est à dire, après réduction au même dénominateur : (1/x) [x(x-2) - 1] = 0. On reconnaît dans le crochet l'écriture du a- et on a donc l'équation : $(1/x)[(x + \sqrt{2} - 1)(x - \sqrt{2} - 1)] = 0$. On voit que « 0 est valeur interdite » et qu'il y a deux solutions $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

c. On utilise la factorisation précédente et un tableau de signe pour résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x} \le x - 2$. C'est à dire $(1/x)[(x + \sqrt{2} - 1)(x - \sqrt{2} - 1)] \ge 0$. **Faites le tableau de signe**. On retrouve le même résultat qu'au 1.

Exercice 4 La fonction f : $x \mapsto (1 - 2x)^2$ se décompose en $x \mapsto 1 - 2x$ suivie de la fonction carré. Pour ses variations, soit u et v deux réels tels que $2 \le u < v \le 5$. On leur applique **la fonction affine $x \mapsto 1 - 2x$ qui est décroissante sur ℝ** car le coefficient de x est négatif. On obtient alors : $-9 \ge 1-2u > 1-2v \ge -3$. Tous ces réels sont négatifs et on sait que la fonction carré est strictement décroissante sur]-∞ ; 0]. On arrive donc à $9 \le f(u) < f(v) \le 81$. Nous venons d'établir que f est strictement croissante sur [2 ; 5] .

Exercice 5 (**Reprises du DS 5**.) a- On considère une famille de nombre composée de un « 1 », deux « 2 », trois « 3 » etc. jusqu'à onze « 11 ». À l'aide de votre machine calculez leur moyenne et leur médiane. La machine donne : **Moyenne : 7,667 et médiane : 8.**

b- a est un réel. Dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) on donne les points A (5; 26) B(10 ; 46) et P (a ; 35). les trois points A, B et P sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires. Nous avons : $\overrightarrow{AB}$ (5 ;20) et $\overrightarrow{AP}$ (a-5 ;9). La condition de colinéarité (xy'-yx'=0) s'écrit ici : 45 – 20(a-5) = 0 c'est à dire **a = 7,25.**

Exercice 6 On se promène sur les arêtes et/ou les diagonales d'un carré ABCD. On considère des promenades **partant de A et de longueur 2**.

a- Modélisons à l'aide d'un arbre une telle promenade : Au départ de A il y a 3 branches possibles (B, C ou D) Chacune de ces 3 branches se divise à son tour en 3 branches, ce qui fait 9 promenades. Comme chaque division a été parfaitement aléatoire, toutes ces 9 branches ont la même possibilité d'être choisies par le promeneur.

b- Les deux situations: « Ne se déplacer que sur des diagonales » ou « ne se déplacer que sur des côtés du carré » seront sensiblement aussi fréquentes, car sur notre arbre chacune des deux correspond à 3 branches.

c- Une simulation possible de cette promenade peut être : Si le premier chiffre est 0 je considère le suivant. Si le premier chiffre est1, 2 ou 3 je considère que je choisis « A », pour 4, 5 ou 6 ce sera « B » et pour 7, 8 ou 9 ce sera C. Je passe ensuite au chiffre suivant pour le deuxième déplacement (en respectant ordre numérique et ordre alphabétique, par exemple). Dans le cas où ce nombre serait 0, 20757831, la promenade obtenue avec MA simulation est : A $\mapsto$ B (sens du « 2 ») $\mapsto$ D (sens du « 7 », le « 0 » ayant été éliminé)

Exercice 7 : Dans la somme cos(0) +cos(π/4) + cos(2π/4) +cos(3π/4) +… + cos(8π/4) l'observation du cercle trigonométrique montre que certains termes pris 2 par 2 s'annulent (cos(π/4) et cos(3π/4) par exemple), d'autres sont nuls (cos(2π/4) et cos(6π/4)). Il ne reste qu'un seul terme : cos(8π/4) qui vaut 1. La moyenne demandée est donc 1/9 (car il y a 9 termes !)