2nde 15 ~ Mathématiques ~ DS N° 3 du 4 décembre 2006 ~ Généralités sur les fonctions.

Exercice 0(1,5 points) **:** x est un réel strictement supérieur à 1. Écrire sans radical au dénominateur et simplifiez l'écritures du réel suivant : $c = \dfrac{2x(x-1)}{x+\sqrt{x}}$

Exercice 1 (1 point): Sur l'écran de votre calculatrice, faire apparaître la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{1-2x}{3+4x}$ en imposant à x d'être entre -1/2 et 1 et à y d'être entre -1 et 3. Recopiez schématiquement le tracé obtenu.

Exercice 2 (2,5 points)
Comparer 2-(a-1)² et 2-(b-1)² sachant que $5 \le a < b \le 10$. (on laissera toutes les étapes nécessaires et on justifiera les plus importantes.)
En fait vous avez établi ici les variations d'une fonction. De quelle fonction s'agit-il et précisez les variations obtenues.

Exercice 3 (4 points)

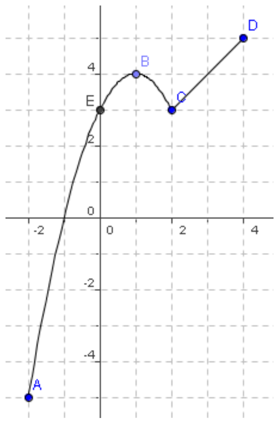
Question	V / F	Preuve
a-		
b- (etc…)		

Voici ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f.
Recopiez un tableau analogue à celui ci-dessus (question / réponse : preuve) puis complétez le par la réponse (Vrai ou Faux) concernant les affirmations ci-contre. dans chaque cas vous indiquerez en 3ème colonne un « élément de preuve » de votre réponse.

x	-3		-2		2		5
f	-1	↘	-3	↗	6	↘	-3

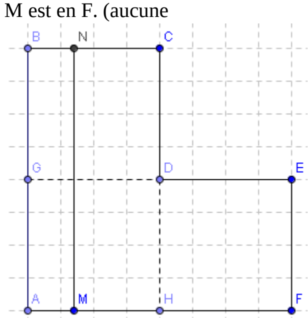
a- la fonction f est strictement croissante sur [-3 ; -2]
b- la fonction f est définie sur [-3 ; 6]
c- La fonction f à deux minimums sur son intervalle de définition.
d- Le réel -3 a deux images par f.
e- Le réel 5 a deux antécédents par f.
f- Pour tous réels a et b de [2 ; 3] tels que a < b, on est sûr que f(a) > f(b).
g- f(-2,5) est négatif.
h- f(4) ne peut pas être positif.

Exercice 4 (4 points)
La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère (O, I, J). Simplement en lisant cette courbe, répondre aux questions suivantes (aucune justification n'est attendue : réponse juste 0,5 ou 1 suivant la question



a- Que vaut le produit : f(1) × [f(3) – f(0)] ? Ce nombre a-t-il des antécédents ? Si oui, donnez les.**[0,5 point]**
b- Quel est l'ensemble de définition de f (On le notera Df) ? **[0,5point]**
c- Quel est le maximum de f sur [-2 ; 0] ?
d- f est-elle strictement décroissante sur un intervalle (si oui, lequel ?) **[0,5 point]**
e- On note g la fonction g : x ↦ 1/f(x). Quel est l'ensemble de définition de g ? **[1point]**
f- On note h la fonction h : $x \mapsto \sqrt{f(x)}$. Quel est l'ensemble de définition de h ?**[1point]**
g- Donner un réel ayant exactement 3 antécédents par f. **[0,5 point]**

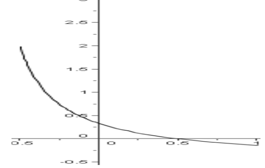
Exercice 5 (0,25 + 0,5 + 0,5 + 0,75 + 1 soit 3 points)
On donne la figure ci-contre. AHDG, GDCB, HDEF sont des carrés de coté 1, AF = AB = 2, etc. M est un point du segment [AF]. On note x = AM. x est la longueur du segment [AM])
La perpendiculaire à (AF) passant par M recoupe le polygone ABCDEF en un point N. On considère le polygone Q situé à gauche de (MN), (c'est à dire ABNM si M ∈ [AH] ou ABCDNM si M ∈ [FE]), et on s'intéresse à son aire.



1- Calculer cette aire dans le cas particulier où M est en H, puis dans le cas particulier où M est en F. (aucune justification !)
2- On suppose que M ∈ [AH]. Exprimer alors l'aire du rectangle ABNM en fonction de x.
3- On suppose que M ∈ [HE]. Exprimer en fonction de x l'aire du polygone Q (c'est à dire ABCDNM).
4- On note f la fonction qui, au réel x fait correspondre l'aire du polygone Q . Sur quel intervalle est définie la fonction f. Exprimer f(x) en fonction de x. (On distinguera deux cas.)
5- Représenter la fonction f dans un repère orthonormal (O ; I ; J)

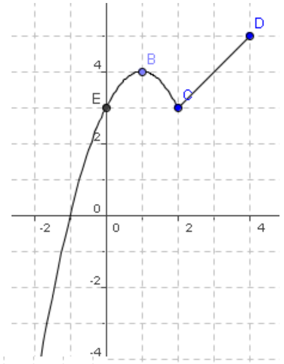
Exercice 6 (4 points)
ABC est un triangle. P est un point de la droite (BC) distinct de B et de C. On appelle I le milieu de [AP]. La parallèle à (BC) passant par I recoupe (AB) en K et (AC) en L. Les droites (BL) et (CK) sont sécantes en G.
a- Faire une figure et rappeler les hypothèses.
b- Montrer que le milieu de [BC] est un point de la droite (AG).

2nde 15 ~ Mathématiques ~ Correction du DS 3 ~ généralités sur les fonctions.



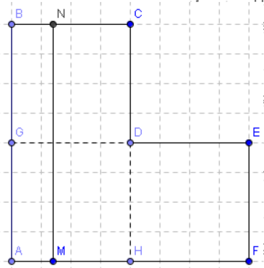
Exercice 0 : Voir DS2 !
Exercice1 : Voici le schéma que vous devez obtenir su votre écran.
Exercice 2 :
Pour comparer2-(a-1)² et 2-(b-1)², on part de $5 \le a < b \le 10$. On en déduit les inégalités suivantes : $4 \le a-1 < b-1 \le 9$. Tous ces nombres étant positifs, on obtient ensuite : $16 \le (a-1)^2 < (b-1)^2 \le 81$. En passant aux opposés on obtient : $-16 \ge (a-1)^2 > (b-1)^2 \ge -81$. En ajoutant 2 on arrive au résultat demandé : $-14 \ge 2-(a-1)^2 > 2 - (b-1)^2 \ge -79$. On a démontré que la fonction f définie par f : x ↦ 2-(x-1)² est strictement décroissante sur [5 ; 10].

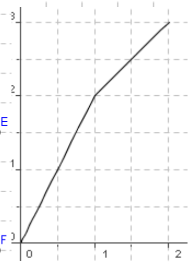
Exercice 3 **(voir le tableau de variations sur l'énoncé.)**
i- la fonction f est strictement décroissante sur [-3 ; -1] . FAUX car sur [-2 ; -1] elle est strictement croissante
j- la fonction f est définie sur [-3 ; 6]. FAUX car les nombres supérieurs à 5 n'ont pas d'image.
k- La fonction f à deux minimums sur son intervalle de définition. FAUX : si un minimum existe … il est unique !
l- Le réel -3 a deux images par f. FAUX : L'image d'un réel de Df est UNIQUE !!
m- Le réel 5 a deux antécédents par f. VRAI : l'un est entre -2 et 2 et l'autre entre 2 et 5.
n- Pour tous réels a et b de [2 ; 3] tels que a < b, on est sûr que f(a) > f(b). VRAI car f est strictement décroissante sur [2 ; 5] donc sur [2 ; 3]
o- f(-2,5) est négatif. VRAI car il est entre -3 et -1.
p- f(4) ne peut pas être positif FAUX il peut être positif ou négatif. On sait seulement qu'il est entre -3 et 6.



Exercice 4 La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère (O, I, J).
h- Le produit : f(1) × [f(3) – f(0)] vaut : 4×(4 – 3) = 4 ? 4 a deux antécédents 1 et 3.
i- L'ensemble de définition de f est Df = [-2 ; 4]
j- Le maximum de f sur [-2 ; 0] est 3.
k- f est strictement décroissante sur [1 ; 2].
l- On note g la fonction g : x ↦ 1/f(x). L'ensemble de définition de g est [-2 ; -1 [∪]-1 ; 4]
m- On note h la fonction h : $x \mapsto \sqrt{f(x)}$. L'ensemble de définition de h est[-1 ; 4].
n- Un réel ayant exactement 3 antécédents par f. est (par exemple) 3,5.

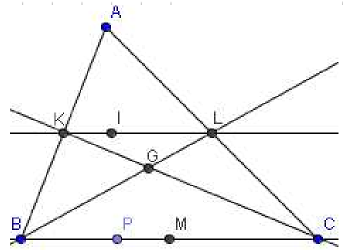
Exercice 5
On donne la figure ci-contre. On note x = AM.





6- Dans le cas particulier où M est en H, l'aire de Q est 2. Dans le cas particulier où M est en F cette aire est 3.
7- On suppose que M ∈ [AH]. L'aire du rectangle ABNM est alors : 2x.
8- On suppose que M ∈ [HE]. L'aire du polygone Q est alors 2 + (x-1) c'est à dire x+1
9- On note f la fonction qui, au réel x fait correspondre l'aire du polygone Q . la fonction f est définie sur [0 ;2]. Exprimons f(x) en fonction de x. Si x ∈ [0 ;1] alors f(x) = 2x. Si x ∈]1 ; 2] alors f(x) = x + 1
10- Représentation de la fonction f dans un repère orthonormal (O ; I ; J) :

Exercice 6
c- ABC est un triangle.
P est un point de la droite (BC)
I le milieu de [AP].
La parallèle à (BC) passant par I recoupe (AB) en K
La parallèle à (BC) passant par I recoupe (AC) en L.
Les droites (BL) et (CK) sont sécantes en G.



d- Pour montrer que la droite (AG) passe par le milieu de [BC], il suffit d'établir que (AG) est une médiane ou bien que G est le centre de gravité de ABC. Pour cela il suffit d'établir que (BL) et (CK) sont deux médianes de ABC.
Montrons donc que K est le milieu de [AB]. Pour cela nous appliquons le théorème des milieux dans le triangle ABP. Nous savons que la parallèle au côté (BP) passant par I , milieu du côté [AP] recoupe le côté [AB] en K. K est donc le milieu de [AB]. La droite (CK) est donc une médiane de ABC.
Nous montrons de même avec le triangle APC que la droite (BL) est une autre médiane de ABC. Leur point d'intersection, G est donc le centre de gravité de ABC. La droite (AG) est donc la troisième médiane de ABC. Elle coupe donc [BC] en son milieu. Le milieu (M sur ma figure) de [BC] est donc un point de (AG).