2nde 15 ~ Mathématiques ~ DS N°2 ~ CORRECTION ~ 6 novembre 06 ~ inégalités, distance, valeur absolue.

Exercice 1

1- L'ensemble des réels a qui vérifient $|a + 2| < 5$ est]-7 ; 3[. Il suffit de faire un schéma pour s'en assurer.

2- Si b est un réel minoré par 10, alors il est POSITIF et son inverse est alors majoré par 0,1. En effet de b > 10, on déduit par une propriété que vous connaissez parfaitement (… !!!) que 1/b < 1/10.

3- x est un réel strictement supérieur à 1. $\frac{2x(x-1)}{x+\sqrt{x}} = \frac{2x(x-1)(x-\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} = \frac{2x(x-1)(x-\sqrt{x})}{x^2-x} = 2(x-\sqrt{x})$

4- Trouver tous les entiers naturels n tels que $\frac{5}{n} > \frac{9}{7}$. Ces deux réels étant POSITIFS, on peut écrire $0 < \frac{n}{5} < \frac{7}{9}$ et ensuite en multipliant par 5 (qui est positif) : $0 < n < \frac{35}{9} < 4$. Les seules valeurs possibles pour n sont donc 1, 2 et 3

5- x est un réel **strictement négatif**. Calculons $d^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2\times x\times\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 7 + 2 = 9$. Comme x est strictement négatif, il en est de même pour $d = x + \frac{1}{x}$ et comme le carré vaut 9, le nombre d vaut -3 !

6- y est un réel de l'intervalle $[\frac{1}{12} ; \frac{1}{6}]$. On a donc l'encadrement $\frac{1}{12} < y < \frac{1}{6}$. On en déduit en multipliant par -2 (NÉGATIF !!) $\frac{-1}{3} < -2y < \frac{-1}{6}$. Puis en ajoutant 1 : $\frac{2}{3} < 1 - 2y < \frac{5}{6}$. Le réel A est donc dans l'intervalle $]\frac{2}{3} , \frac{5}{6}[$, A est donc compris entre 0 et 1, et par suite, nous savons qu'il est supérieur à son carré A².

7- « Une valeur approchée du réel R est 3 à 10^{-1} près » s'écrit : « 2,9 < R < 3,1 ». « Une valeur approchée du réel S est 5 à 2×10^{-1} près » s'écrit : « 4,8 < S < 5,2 ». Pour encadrer R/S nous devons d'abord encadrer 1/S. Comme S est positif, il n'y a pas de difficulté : 1/5,2 < 1/S < 1/4,8. Nous avons maintenant deux inégalités de même sens entre réels POSITIFS dont nous pouvons faire le produit membre à membre : 2,9/5,2 < R/S < 3,1/4,8. Pour répondre à la demande nous devons « agrandir le cadre » et écrire par exemple : 0,55 < 2,9/5,2 < R/S < 3,1/4,8 < 0,65. On peut alors conclure : R/S $\in$]0,55 ; 0,65[(*NB : le sens des crochets n'a aucune importance*)

Exercice 2. 1- Si on enlève 1 au carré d'un entier n strictement supérieur à 2, on obtient le réel $n^2 - 1$ qui se factorise en (n-1)(n+1). Cet entier ne peut être premier que si l'un des deux facteurs vaut 1 (et si l'autre est premier !!). Or Aucun des deux facteurs ne peut valoir 1. En effet, comme n >2, on a n+1>3 et n-1>1. L'affirmation est donc vraie.

2- L'affirmation | a - b | = | a | + | b| est-elle vraie pour tout réel positif a et tout réel négatif b ? Comme a est positif, on a : |a| = a et comme b est négatif, on a : |b| = -b . Le deuxième membre vaut donc a-b . De plus -b est positif et a-b est donc la somme de deux positifs, donc positif lui même. Le premier membre s'écrit donc : a-b. On a bien l'égalité proposée.

Exercice 3 a est un réel strictement compris entre 0 et 1.

1- La différence $\frac{1+a}{1-a}-(1 + 2a)$ s'écrit :

$\frac{1+a}{1-a} - (1+2a) = \frac{1+a-(1+2a)(1-a)}{1-a} = \frac{1+a-(1+a-2a^2)}{1-a} = \frac{2a^2}{1-a}$

2- On peut maintenant comparer les réels $\frac{1+a}{1-a}$ et 1 + 2a car le signe de leur différence est évident : 2a² est positif car c'est un carré. 1-a est positif car il est dit que a < 1. Le quotient $\frac{2a^2}{1-a}$ est donc positif.

On a donc pour x compris entre 0 et 1 : $\frac{1+a}{1-a} > (1 + 2a)$

3- Les deux réels : $A = \frac{1,000\,000\,003}{0,999\,999\,997}$ et B = 1,000 000 006 correspondent au cas précédent avec $x = 3 \times 10^{-9}$. Cette valeur est bien entre 0 et 1. On a donc A > B. Ce résultat n'était pas prévisible à la machine car dans les deux cas elle donne 1 000 000 006. (Ce qui pourrait laisser croire que A = B !!)

Exercice 4 Choix A :

L'aire A demandée se calcule par : A = a² - (π/4)a² = (1 - π/4)a²
Le côté a vaut 2 cm à 1 mm près s'écrit : 1,9 < a < 2,1 Comme tous ces nombres sont positifs, on peut passer aux carrés : 1,9² < a² < 2,1². Reste à encadrer 1- π/4, c'est à dire ici : 1 + (-π/4). De 3,1 ≤ π ≤ 3,2, on déduit 3,1/4 < π/4 < 3,2/4 (multiplication par un positif : 1/4), puis -3,2/4 < -π/4 < -3,1/4 (passage aux opposés), puis en ajoutant 1 : 0,2 < 1 - π/4 < 0,9/4. A ce niveau, il ne reste plus qu'à faire le produit membre à membre : 1,9²×0,2 < A < 2,1²×0,9/4 c'est à dire 0,722 < A < 0,9225. On agrandit le cadre pour répondre à la demande de l'énoncé : 0,72 < A < 0,93 c'est à dire : Une valeur approchée de A est 0,825 à 0,105 près.

Exercice 4 Choix B :

1- La calculatrice donne pour 3^{50} : $7,17897988 \times 10^{23}$. D'où l'encadrement : $7,1 \times 10^{23} < 3^{50} < 7,2 \times 10^{23}$ ou bien pour respecter l'énoncé : $71\times 10^{22} < 3^{50} < 72 \times 10^{22}$ (on a donc a = 71)

2- Déduisons de cet encadrement un encadrement de $(3^{50})^{50}$. Pour cela on imagine le produit membre à membre de 50 inégalités identiques à celle du 1- entre réels positifs. Il vient : $(71\times 10^{22})^{50} < (3^{50})^{50} < (72 \times 10^{22})^{50}$ c'est à dire $71^{50}\times 10^{22\times50} < (3^{50})^{50} < 72^{50} \times 10^{22\times50}$ a machine donne $71^{50} \approx 3,65 \times 10^{92}$ et $72^{50} \approx 7,35\times 10^{92}$. On en déduit donc (toujours en prenant soin d'agrandir le cadre !!) : $3 \times 10^{92}\times 10^{22\times50} < (3^{50})^{50} < 8\times10^{92} \times 10^{22\times50}$ c'est à dire : $3 \times 10^{1192} < (3^{50})^{50} < 8 \times 10^{1192}$.

3- On en déduit donc que ce nombre $(3^{50})^{50}$ s'écrit avec 1 193 chiffres !!