2^{nde} 15 ~ Mathématiques ~ DS1 ~ fait en classe le lundi 2 octobre 2006. ~ 1 h. ~ Les nombres, le calcul.

NB : Vous traiterez ces exercices dans l'ordre que vous voulez mais vous rédigerez de façon à ce que le correcteur voit <u>tout de suite</u> de quel exercice vous parlez. Pour cela, vous rappellerez les références (exercice N° …) et surtout vous reprendrez (*peut-être de façon synthétique*) les données de l'énoncé.

<u>Exercice 1</u>. (0,5 + 1,5 + 1 *points*)

a- Pour a et b entiers relatifs ($b \neq 0$ et $d \neq 0$) écrire sous forme d'un seul quotient la différence : $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$

b- En déduire que la différence de deux rationnels est un rationnel. Votre démonstration commencera ainsi : « Soit x et y deux rationnels. Il existe alors des entiers …. »

c- On vous rappelle que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Utilisez la propriété du b- pour prouver que le réel A = $\sqrt{2}$ + 5/3 n'est pas rationnel.

<u>Exercice 2</u>. (1,5 + 0,5 + 2 *points*)

Le « nombre d'or » est très célèbre pour diverses raisons. Sa valeur est $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a- Vérifier que le nombre $A^2 - A$ est un entier.

b- En déduire l'expression de A^2 sous la forme $\alpha A + \beta$ où α et β sont deux entiers à déterminer.

c- En déduire l'expression de A^3 sous une forme analogue [*on écrira $A^3 = A^2 \times A$ et on utilisera deux fois le résultat du b-*]

<u>Exercice 3</u>. (1,5 + 1,5 + 1 + 2 + 2 *points*)

a- Écrire très simplement le nombre suivante (*a et b sont deux réels distincts, non opposés et non nuls*) :

$B = \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\times\frac{ab}{a-b}-\frac{a^2-b^2}{a+b}$ (NB : *on laissera tous les calculs intermédiaires utiles*)

b- a est un réel. Montrez que l'inverse de $C = \sqrt{a^2+1}-a$ peut s'écrire sans utiliser de trait de fraction.

c- Utilisez votre calculatrice pour donner une valeur décimale approchée de $D = \frac{\pi-2\sqrt{2}}{3-\pi}$ arrondie à 10^{-3}près .

d- Quelle est la valeur exacte du nombre : $E = \frac{(10^{11}+1)^2-(10^{11}-1)^2}{2\times10^{11}}$?

e- a est un réel. Écrire le nombre $F = a^9\times8\times(3a)^3$ sous forme de puissance d'un seul nombre (*c'est à dire sous la forme A^B avec A et B à préciser, $B \neq 1$!!*) (NB : *on laissera tous les calculs intermédiaires utiles*)

<u>Exercice 4</u>. (0,5 + 1 + 0,5 + 1 *points*)

Les exercices qui suivent utilisent quelque part la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier.

1- a- Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier : 1 694

b- En déduire le <u>nombre</u> de diviseurs de 1 694

c- Quel est <u>le plus petit</u> nombre entier, qui, multiplié par 1 694 donne un « carré parfait » (c'est à dire : le carré d'un entier) (*Donner quelques explications* !)

d- On considère des rectangles dont la longueur de chaque côté est un nombre <u>entier</u> de centimètres. Combien existe-t-il de tels rectangles (<u>deux à deux distincts</u>) dont l'aire soit : 1 694cm² (*Donner quelques explications* !)

2- On considère des parallélépipèdes rectangles dont la longueur de chaque côté est un nombre <u>entier</u> de centimètres. Existe-t-il de tels solides dont une face soit un carré et dont le volume soit 462 cm^3 (*Donner quelques explications* !)

<u>Exercice 5</u>. (2 *points*)

a- La propriété suivante est-elle vraie : « Pour tout entier naturel p, le nombre $(3p + 1)^2 + p + 2$ est premier. » ?

b- La propriété suivante est-elle vraie : « si le carré d'un nombre est rationnel, alors il en est de même pour ce nombre ? »

2^{nde} 15 ~ Mathématiques ~ DS1 ~ fait en classe le lundi 2 octobre 2006. ~ CORRECTION.

<u>Exercice 1</u>. (0,5 + 1,5 + 1 *points*)

a- Pour a et b entiers relatifs ($b \neq 0$) la différence $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ s'écrit :

b- Soit x et y deux rationnels. Il existe alors des entiers a, b, c et d tels que x = a/b et y = c/d. La différence x-y s'écrit alors : $\frac{ad-bc}{bd}$. Cette différence est bien rationnelle car elle s'écrit comme quotient d'entiers. En effet les produits d'entiers ad, bc et bd sont entiers ainsi que la différence d'entiers ad -bc. x – y est donc rationnel.

c- On sait que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Supposons que A = $\sqrt{2}$ + 5/3 soit rationnel. D'après la propriété du b-, la différence des deux rationnels A et 5/3 serait rationnelle. Or cette différence est $\sqrt{2}$ …. qui n'est pas rationnel . Cette contradiction permet de conclure que A n'est pas rationnel.

<u>Exercice 2</u>. (1,5 + 0,5 + 2 *points*)

a- La valeur du « nombre d'or » est $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculons $A^2 - A$. $A^2 - A = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{6}{4}-\frac{1}{2}$ =1. On a donc $A^2 - A = 1$. $A^2 - A$ est bien un entier.

b- On en déduit immédiatement : $A^2 = A + 1$. (on a $\alpha = \beta = 1$)

c- $A^3 = A^2\times A = (A + 1)A = A^2 + A = (A + 1) + A = 2A + 1$. (on a bien la forme demandée avec $\alpha = 2$ et $\beta = 1$)

<u>Exercice 3</u>. (1,5 + 1,5 + 1 + 2 + 2 *points*)

a- a et b sont deux réels distinct et non nuls $B = \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\times\frac{ab}{a-b}-\frac{a^2-b^2}{a+b} = \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)\times\frac{ab}{a-b}-\frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \frac{(a-b)(a+b)ab}{ab(a-b)}-(a-b) = (a+b)-(a-b) = 2b$

b- a est un réel. L'inverse de $C = \sqrt{a^2+1}-a$ peut s'écrire $\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}$ et en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{a^2+1}+a$, on obtient : $\frac{\sqrt{a^2+1}+a}{a^2+1-a^2} = \sqrt{a^2+1}+a$. Nous n'avons pas utilisé de trait de fraction !

c- La calculatrice donne pour valeur décimale approchée de $D = \frac{\pi-2\sqrt{2}}{3-\pi}$: -2,211735714. Arrondie à 10^{-3}près on a donc : -2,212 .

d- La valeur exacte du nombre : $E = \frac{(10^{11}+1)^2-(10^{11}-1)^2}{2\times10^{11}}$ s'obtient en transformant le numérateur. On peut développer, mais il est plus élégant de chercher à factoriser la différence de carrés en $[(10^{11} + 1) – (10^{11} – 1)] [(10^{11} + 1) +(10^{11} – 1)] = 2(2\times10^{11}) = 4\times10^{11}$
La simplification du quotient donne : E = 2.

e- a est un réel. Le nombre $F = a^9\times8\times(3a)^3$ peut aussi s'écrire : $a^9\times2^3\times3^3\times a^3 = a^{12}\times2^3\times3^3 = (6a^4)^3$

<u>Exercice 4</u>. (0,5 + 1 + 0,5 + 1 *points*)

1- a- La décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier 1 694 est $2\times 7 \times 11^2$

b- Le nombre de diviseurs de 1 694 est donc $2 \times 2 \times 3 = 12$ [on peut faire un arbre avec 2 « grosses » branches (une pour 2^1 et une pour 2^0(c'est à dire pas de 2 !!)) qui se divisent chacune en 2 « petites » branches, qui se divisent chacune en 3 « toute petites » branches]

c- Le plus petit nombre entier, qui, multiplié par 1 694 donne un « carré parfait » est 2×7 c'est à dire 14. [les seuls facteurs de la décomposition en produit de facteurs premiers de 1694 ayant un exposant impair sont 2 et 7.]

d- On considère des rectangles dont la longueur de chaque côté est un nombre entier de centimètres. La longueur et la largeur de tels rectangles sont des diviseurs de l'aire 1 694. Il y a donc 12 rectangles répondant à la question, mais notre méthode compte chaque rectangle deux fois. Il y a donc 6 rectangles.

2- On considère des parallélépipèdes rectangles dont la longueur de chaque côté est un nombre entier de centimètres. Si une face est un carré, dans la décomposition en produit de facteurs premiers du volume on doit trouver un carré. Or, $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$. Il ne peut pas y avoir de carré dans ses diviseurs.

<u>Exercice 5</u>. (2 *points*)

a- La propriété suivante: « Pour tout entier naturel p, le nombre $(3p + 1)^2 + p + 2$ est premier. » est fausse. Contre-exemple :p = 3 donne le nombre 105 qui est un multiple de 5 (donc pas premier).

b- La propriété suivante: « si le carré d'un nombre est rationnel, il en est de même pour ce nombre » est fausse. Contre-exemple : $\sqrt{2}$: son carré (2) est rationnel et pourtant $\sqrt{2}$ ne l'est pas.