

Lycée Saint Sernin ~ MATHÉMATIQUES
CORRECTION du devoir commun aux classes de seconde
Mardi 3 février 2004 ~ 2h

Exercice 1 : Fonctions

I. Etude graphique de la fonction f

- a) L'ensemble de définition de la fonction f est $[0 ; 12]$
- b) $f(0) = 3$; $f(\frac{13}{2}) = 8,5$ et $f(11) = 3$.
- c) Résoudre $f(x) = 4$ revient à chercher les abscisses des points de C_f qui ont pour ordonnée 4 :
 L'ensembles des solutions de cette équation est donc $S = \{1 ; 3,5 ; 5,5 ; 10,5 ; 11,5\}$
 Pour $f(x) = 11$, $S = \{8\}$
- d) Tableau de variation de la fonction f.

x	0	2,5	4,5	8	11	12
f	3	5,5	2,5	11	3	7

- e) Résoudre $f(x) \geq 4$ revient à chercher les abscisses des points de C_f qui ont une ordonnée supérieure ou égale à 4 :
 L'ensembles des solutions de cette inéquation est donc $S = [1 ; 3,5] \cup [5,5 ; 10,5] \cup [11,5 ; 12]$.
 La température a été supérieure ou égale à 4°C pour des durées (depuis le début de l'expérience) comprises entre 1 et 3 minutes 30 secondes, entre 5 minutes 30 et 10 minutes 30, ainsi qu'entre 11 minutes 30 et 12 minutes.

II. Etude de la fonction g

- a) $-\frac{1}{7}(x-8)^2 + 11 = -\frac{1}{7}(x^2 - 16x + 64) + 11 = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{16}{7}x - \frac{64}{7} + \frac{77}{11} = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{16}{7}x + \frac{13}{7} = g(x)$
- b) Soit a et b deux réels de $[0 ; 8]$ tels que $a < b$:
 $0 \leq a < b \leq 8$
 $-8 \leq a - 8 < b - 8 \leq 0$ (car ajouter un nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas l'ordre.)
 $64 \geq (a-8)^2 > (b-8)^2 \geq 0$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ OU Les carrés de deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de ces deux nombres.

$$-\frac{64}{7} \leq -\frac{1}{7}(a-8)^2 < -\frac{1}{7}(b-8)^2 \leq 0 \quad (\text{car multiplier par un nombre strictement négatif change l'ordre.})$$

$$-\frac{64}{7} + 11 \leq -\frac{1}{7}(a-8)^2 + 11 < -\frac{1}{7}(b-8)^2 + 11 \leq 11 \text{ d'où } g(a) < g(b) \text{ et la fonction g est croissante sur } [0 ; 8]$$

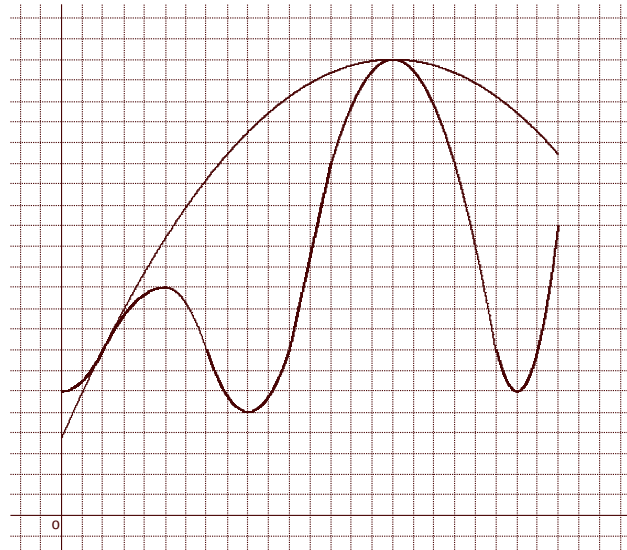
- c) Tableau de valeurs

x en min	0	2	4	6	8	10	12
g(x) en $^\circ\text{C}$	1,9	5,9	8,7	10,4	11	10,4	8,7

- d) tableau de variations de g.

x	0	8	12
g(x)	1,9	11	8,7

- e) Sur $[0 ; 12]$, la fonction g admet un maximum qui vaut 11.
 Il est atteint pour $x = 8$.



III. Comparaison des deux fonctions

- a) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ c'est chercher les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
 L'ensembles des solutions de cette équation est donc $S = \{1 ; 8\}$
- b) La température de la seconde expérience est inférieure à celle de la première pendant 1 minute.

Exercice 2 : Equations-Inéquations

1) Etude du signe de $(1-2x)(x+7)$.

x	$-\infty$	-7	1/2	$+\infty$
$1-2x$		+	+	-
$x+7$	-	-	+	+
$(1-2x)(x+7)$	-	-	+	-

2) $f(x) = (1-2x)^2 + 3(1-2x)(x+2) = (1-2x)(1-2x+3x+6) = (1-2x)(x+7)$

3) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est $S =]-\infty; -7] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice 3 : Géométrie dans l'espace

Partie I

- a- Les droites (AC) et (DF) ne sont pas sécantes car elles ne sont pas coplanaires.
- b- Les droites (IJ) et (CF) sont sécantes car elles sont coplanaires et ne sont pas parallèles.
- c- Les droites (IJ) et (AB) ne sont pas parallèles car elles ne sont pas coplanaires.
- d- La droite (DF) est parallèle au plan (ABE) car, AEFD étant un rectangle, (AE) et (DF) sont parallèles.
- e- Les plans (DFC) et (ABE) sont parallèles car les droites sécantes (AB) et (BE) du plan (ABE) sont respectivement parallèles aux droites sécantes (DC) et (CF) du plan (DFC).

Partie II

Partie III

- 1- ABJ est un triangle rectangle en B car ABCD est un rectangle. De plus, ABJ est isocèle en B car $AB = a$ et $BJ = BC/2 = a$.

D'après le rappel, on sait que $AJ = a\sqrt{2}$

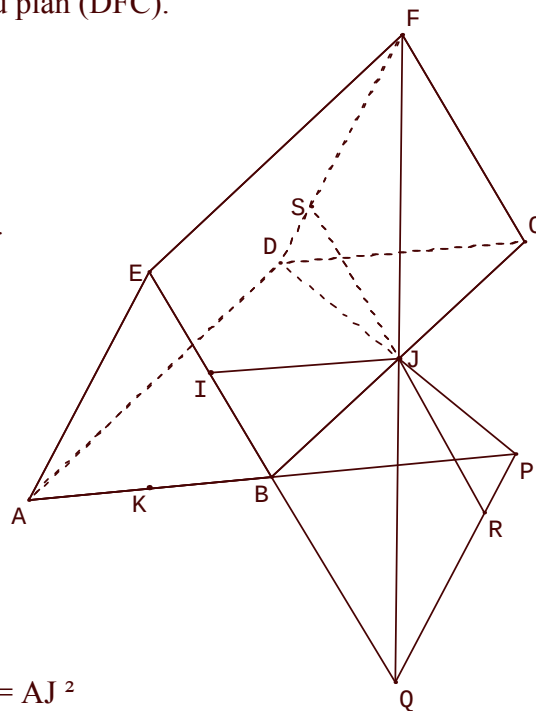
- 2- I et J sont les milieux respectifs de [EB] et [BC], d'après le théorème des milieux dans le triangle EBC, (IJ) et (CE) sont parallèles et $IJ = CE/2$. Or d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle EBC, $CE^2 = BC^2 + EB^2 = 5a^2$

Finalement $IJ = EC/2 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

- 3- [AI] est la hauteur d'un triangle équilatéral d'où $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

d'où $AI^2 + IJ^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} = 2a^2$. Or $AJ^2 = 2a^2$ d'où $AI^2 + IJ^2 = AJ^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AIJ est rectangle.



Partie IV

- 1- G et G' étant les centres de gravité respectifs du triangle (EAB) et du triangle (BCE),

On a $\frac{EG}{EK} = \frac{EG'}{EJ} = \frac{2}{3}$.

Les points, E, G et K et E, G' et J sont alignés dans le même ordre.

D'où d'après la réciproque du théorème de Thalès, (GG') et (KJ) sont parallèles.

- 2- (GG') et (KJ) sont deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans (GG'A) et (KJA). De plus (GG'A) et (KJA) ont en commun le point A. Donc d'après le « théorème du toit », l'intersection des plans (KJA) et (GG'A) est la droite passant par A et parallèle à (KJ) c'est-à-dire la droite (AC).

