Exercice 1 1ère Partie

1) a) $D_f = [0\,;3]$; b) f(1) = 2 ; c) $\frac{3}{2}$ a deux antécédents par f : 0 et 2 ; d) S = [2 ; 3] U {0}

2) $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ U {2} constitue l'ensemble des réels qui n'ont qu'un seul antécédent par f .

3) f($\sqrt{2}$) = $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}-2+3-\sqrt{2}\right)=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ soit f($\sqrt{2}$) ≈ 1,91

4) a) $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(3-x)=\frac{1}{2}\left(3x-x^2+3-x\right)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

b) On peut résoudre l'équation f(x) = $\frac{3}{2}$ il vient $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ soit $-\frac{1}{2}x^2+x=0$ qui s'écrit aussi $x\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=0$.
Un produit de facteurs étant nul ssi l'un de ses facteurs est nul, on obtient deux solutions, 0 et la solution de $\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=0$ qui est 2. L'ensemble des solutions est S = $\{0;2\}$. Les antécédents de 3/2 par f sont donc 0 et 2.

5) En développant $-\frac{1}{2}(x-1)^2+2=-\frac{1}{2}\left(x^2-2x+1\right)+2=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}+2=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}=f(x)$.

6) Soit a et b deux réels de l'intervalle $[0;1]$ avec a < b

$0 \le a < b \le 1$ retrancher 1 à tous les membres de l'inégalité conserve l'ordre donc
$-1 \le a-1 < b-1 \le 0$ la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$ alors

$(a-1)^2 > (b-1)^2$ multiplier les deux membres de l'inégalité par $-\frac{1}{2}$ qui est négatif change l'ordre

$-\frac{1}{2}(a-1)^2 < -\frac{1}{2}(b-1)^2$ Ajouter 2 à chaque membre de l'inégalité ne change pas l'ordre on a donc

$-\frac{1}{2}(a-1)^2+2 < -\frac{1}{2}(b-1)^2+2$ soit f(a) < f(b) . En conséquence la fonction f est croissante sur $[0;1]$.

2ème Partie

1) Aire de AMND = $\frac{(MN+AD)\times AM}{2}=\frac{(x+1)(3-x)}{2}$ = f(x).

2) a) Aire de NDB = $\frac{base\times hauteur}{2}=\frac{DB\times MA}{2}=\frac{(3-1)\times(3-x)}{2}=3-x$

b) g est une fonction affine dont la représentation graphique sur $[0;3]$ est un segment de la droite passant par les points de coordonnées (0 ;3) et (3 ;0).

c) On recherche les abscisses des points de la courbe représentative de la fonction f qui sont au dessus de la droite d'équation y = 3 – x . S = $[1;3]$

d) 3 – x = 0 pour x = 3 et $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ = 0 pour x = 1. On peut dresser le tableau de signes suivant

x	- ∞		1		3		+ ∞
Signe de 3 – x		+		+	0	+	
Signe de $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$		-	0	+		-	
Signe de (3 – x) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)$		-	0	+	0	-	

Alors S = $[1;3]$

On vérifie que f(x) – g(x) =(3 – x) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)$ alors on peut dire que pour x∈ $[1;3]$ l'aire du trapèze AMND est supérieur ou égale à celle du triangle NDB.

Exercice 2 Géométrie dans l'espace

1) Voir figure
2) a) Les plans (SBC) et (GBC) sont confondus
b) (ABC) et (SBC) sont deux plans distincts contenant la droite (BC)
c) I $\notin$ (SAB) et I $\in$ (SDN)
d) Les droites (IN) et (CD) ne sont pas coplanaires.
e) Les droites (IN) et (SD) sont coplanaires et ne sont pas sécantes.
f) (IG) et (MN) ne sont pas parallèles.
g) (IS) est la droite d'intersection des plans (SBD) et (SAC).
h) La parallèle à (AB) passant par le point S est la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC).
3) a) Dans le triangle SAB, la droite (QN) qui passe par les milieux des côtés [SA] et [SB] est parallèle au 3ème côté [AB] donc (QN) $/\!/$ (AB).
Or dans le carré ABCD les côtés opposés sont parallèles et on a (AB) $/\!/$ (CD). En conséquence les droites (QN) et (CD) sont parallèles dont coplanaires. Les points Q, N, C et D sont donc coplanaires.
b) A et L sont deux points du plan (SAL).
G centre de gravité du triangle SBC est un point de la médiane[SL] donc G est un point du plan (SAL).
Q est le milieu de [SA] donc Q est un point du plan (SAL).
Donc les points A, L, G et Q sont quatre points du même plan (SAL) : ils sont coplanaires.
c) C est un point appartenant aux deux plans (CND) et (ABC) donc C $\in$ (CND) $\cap$ (ABC)
D est un point de la base donc du plan (ABC) mais c'est aussi un point du plan (CND) donc D $\in$ (CND) $\cap$ (ABC).
C et D sont donc deux points communs aux plans (CND) et (ABC). Ces plans, n'étant pas parallèles, sont sécants suivant une droite qui est donc la droite (CD).
d) Les droites (AL) et (DC) sont coplanaires et non parallèles donc elles sont sécantes en un point O.
O est un point de la droite (CD) donc du plan (CND). O est un point de la droite (AL) donc du plan (SAL).
D'après 3)a) C, Q, N et D sont coplanaires donc Q $\in$ (CND) . De plus G est un point de la médiane [CN] donc G $\in$ (CND). <u>La droite (QG) est donc une droite du plan (CND).</u>
D'après 3)b) A, L, G et Q sont coplanaires donc la droite <u>(QG) est donc une droite du plan (SAL).</u>
Alors les plans (SAL) et (CND) sont sécants suivant la droite (QG) et à ce titre (QG) contient le point O qui est commun aux deux plans. Donc O $\in$ (QG).
4) a) On utilise la théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B.
On a $AC^2 = AB^2 + BC^2$ soit $AC^2 = 4^2 + 4^2 = 16+16 = 32$ alors $AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
Dans un carré les diagonales se coupent en leur milieu donc I est le milieu de [AC] et $AI = 2\sqrt{2}$
b)SA = SC donc le triangle SAC est isocèle de sommet principal S.
En conséquence la médiane [SI] issue de S est aussi hauteur de ce triangle.
[SI] $\perp$ [AC] donc le triangle SAI est rectangle en I. D'après le théorème de Pythagore $SA^2 = SI^2 + AI^2$ donc
$SI^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2 = 36 - 8 = 28$ alors $SI = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.
c) $V = \dfrac{1}{3} AB^2 \times SI = \dfrac{16 \times 2\sqrt{7}}{3} = \dfrac{32\sqrt{7}}{3}$ cm^3

Figure exercice 2

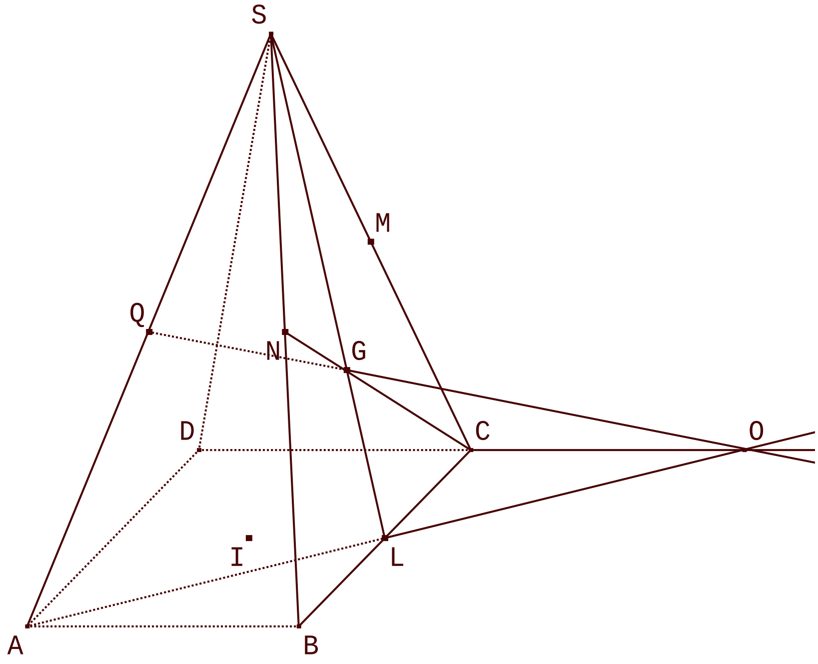

Figure exercice 1