Lycée Saint Sernin ~ Correction rapide du devoir commun de Mathématiques du vendredi 8 février 2002.

Exercice 1 partie A

a) Df = [0 ; 3] car la courbe se situe entre les deux points d'abscisse 0 et 3.

b) L'image de 1 est 9 car le point de la courbe d'abscisse 1 a pour ordonnée 9.

c) Les solutions de f(x) = 9 sont 1 et 3 car les deux seuls points de la courbe dont l'ordonnée est 9 ont pour abscisse 1 et 3.

d) Les solutions de f(x) ≥ 9 sont les réels de [0 ; 1] et le réel 3, car ces réels sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 9.

e) Tableau de variation de la fonction f :

x	0		2		3
f	15	↘	7	↗	9

f) Sur [0 ; 1] la fonction f est décroissante donc : f(0,5) ≥ f(1) et sur [1 ; 3], elle est croissante donc : f(2,1) ≤ f(2,8).

Exercice 1 partie B

g(x) = 2 x² - 8x + 15

a) On développe 2(x – 2)² + 7 et on constate qu'on obtient g(x).

b) Tableau de valeurs de la fonction f :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
g(x)	15	11,5	9	7,5	7	7 ,5	9

c) 2x (x – 4) ≤ 0 La forme de cette équation invite à utiliser un tableau de signes :

x		0		4	
2x	-	0	+		+
x-4	-		-	0	+
2x(x-4)	+	0	-	0	+

On peut alors conclure : Les solution de cette inéquation sont les réels de [0 ; 4].

d) L'inéquation g(x) ≤ 15 s'écrit 2 x² - 8x + 15 ≤ 15qui se transforme en 2x(x – 4) ≤ 0 que nous venons de résoudre. Les solutions de g(x) ≤ 15 sont donc les réels de [0 ; 3].*Car g est définie sur [0 ;3].*

e) La forme indiquée au a) nous invite à utiliser soit les **fonctions de référence** soit les résultats connus de la classe de troisième (**théorèmes des rangements**), soit des connaissances relatives au **déplacement des paraboles** d'équation Y = aX² + b.
Nous utiliserons ici les fonctions de référence en respectant les étapes : x ; x-2 ; (x-2)² ; 2(x-2)² + 7.

Soit x et x' deux réels de [0 ;1] tels que x <x'.

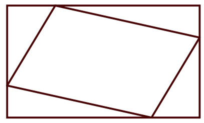
on a : 0 ≤ x < x' ≤ 1. On sait que la fonction affine $x \longmapsto x-2$ est croissante sur ℝ (donc sur [0 ;1]). On en déduit :
-2 ≤ x-2 < x'-2 ≤ -1. On sait que la fonction carrée est décroissante sur [-2 ; -1] (car elle est décroissante sur ℝ) . On en déduit :

4 ≥ (x-2)² > (x'-2)² ≥ 1 On sait que la fonction affine $x \longmapsto 2x+7$ est croissante sur ℝ donc sur [1; 4], ce qui permet de conclure que :

15 ≥ f(x) > f(x') ≥ 9 . Nous venons d'établir que f est décroissante sur [0 ; 2].

Exercice 1 partie C

a) Figure (pas trop à l'échelle !)



b) L'aire du quadrilatère A'B'C'D' se calcule par différence de l'aire du rectangle ABCD (soit 15) et de l'aire des quatre triangles rectangles(AA'D', BB'A' ; CC'B' ; DD'C')(soit 2 fois $\frac{1}{2}x(3-x)$ et 2 fois $\frac{1}{2}x(5-x)$). On obtient bien g(x).

c) Par lecture graphique, on voit que le minimum de f sur [0 ; 3] est 7 et que ce minimum est atteint pour x = 2. L'aire du quadrilatère A'B'C'D' est donc minimale pour x = 2. On peut même préciser que cette aire minimale est 7.

Exercice 2

1) a) Théorème des milieux dans EAB : (JK) // (AE) et $JK = \frac{AE}{2}$ d'où (JK) // (IE) et JK = IE.

Dans les carrés ABEF et BCGF on a (AE) // (FB) et (GC) // (FB) donc (EI) // (GL) ; de plus $EI = GL = \frac{a}{2}$.

b) EIJK et KJLG ont chacun une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur : ce sont des parallélogrammes.

c) D'après b), (EK) // (IJ) et (KG) // (JL) donc le plan (EBG) contient deux droites sécantes parallèles à deux droites du plan (IJL).

2) a) Les côtés du triangle EBG sont les diagonales de trois carrés de même côté a, donc ils ont la même longueur.
EBG est équilatéral. La médiane [GK] est aussi la hauteur issue de G, donc (GK)⊥ (EB).

b) D'après 1) (IJ) // (EB) et (JL) // (GK), or (GK)⊥(EB) d'où (IJ)⊥(JL). Le triangle IJL est donc rectangle en J.

3) Pythagore dans le triangle FBJ rectangle en B:

$$FJ^2 = FB^2 + BJ^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = 5\frac{a^2}{4} \quad \text{d'où} \quad FJ = a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

De même dans le triangle FGL rectangle en G: $FL = a\frac{\sqrt{5}}{2}$

donc le triangle FJL est isocèle en F.

1) a) - Dans FJL isocèle en F, la médiane (FN) est aussi la hauteur issue de F, donc (FN) ⊥ (JL).
- Théorème des milieux dans IJL: (MN) // (IJ) ; or (IJ) ⊥ (JL) d'après 2)b), donc (MN) ⊥ (JL).
- (JL) est perpendiculaire à deux droites sécantes (FN) et (MN) du plan (FMN), donc elle est perpendiculaire à ce plan.

b) La droite (JL) étant perpendiculaire au plan (FMN), elle est orthogonale à toute droite de ce plan en particulier à (FM).