Notations : *Dans toute la correction nous noterons l'aire d'un polynôme AZERTY, par* $A(AZERTY)$.

Exercice numéro 1 :

a) On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant un même nombre à chaque membre
Ainsi : $-3<x<-1$ nous donne : $\boxed{2<x+5<4}$

b) Les inverses de réels strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de ces nombres.
Ainsi $2<x+5<4$ nous donne par passage aux inverses : $\boxed{\frac{1}{4}<\frac{1}{x+5}<\frac{1}{2}}$

c) Les carrés de réels négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de ces nombres.
Ainsi : $-3<x<-1$ nous donne par passage au carré : $\boxed{1<x^2<9}$

d) Lorsqu'on multiplie chaque membre d'une inégalité par un même réel strictement négatif, l'inégalité change de sens.
Ainsi : $1<x^2<9$ nous donne $-18<-2x^2<-2$
Avec la propriété rappelée au a) on passe de cette dernière inégalité à : $\boxed{-15<3-2x^2<1}$

Exercice numéro 2 :

1) Le triangle ABC est équilatéral, donc tous ses angles ont pour mesure 60°.
Nous avons donc : $\widehat{ABC}=60°$ et $\widehat{BCA}=60°$

Comme B est sur le segment [AD], nous avons : $\widehat{ABC}+\widehat{CBD}=180°$
Donc $\widehat{CBD}=180-\widehat{ABC}=180-60=\boxed{120°=\widehat{CBD}}$
Comme C est sur le segment [BE], nous avons : $\widehat{BCA}+\widehat{ACE}=180°$
Donc $\widehat{ACE}=180-\widehat{BCA}=180-60=\boxed{120°=\widehat{ACE}}$
Nous constatons donc que $\widehat{ACE}=\widehat{CBD}$ (=120°)

Le triangle ABC est équilatéral, donc ses cotés ont tous la même longueur,
Donc $AC=CB$

En résumé :
Dans les triangles BCD, et ACE, nous avons :
$\widehat{ACE}=\widehat{CBD}$
$AC=CB$
$BD=CE$ (Par hypothèse)
Or, si deux triangles ont un même angle compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques.

<u>Conclusion :</u> Les triangles BCD et ACE sont isométriques.

2) F est sur le segment [AE], donc nous avons : $\widehat{AEC}=\widehat{FEC}$

Les deux angles $\widehat{ECF}$ et $\widehat{BCD}$ sont opposés par le sommet, ils ont donc la même mesure.
$\widehat{ECF}=\widehat{BCD}$
D'après la question précédente, les triangles BCD et ACE sont isométriques, leurs angles homologues sont donc de même mesure.
Donc $\widehat{CAE}=\widehat{BCD}$
En résumé :
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ECF}=\widehat{BCD}\\ \widehat{CAE}=\widehat{BCD}\end{array}\right\}\text{donc}\ \widehat{ECF}=\widehat{CAE}$$

<u>Conclusion :</u>
Les triangles CEF et AEC ont deux angles de même mesure ($\widehat{AEC}=\widehat{FEC}$ et $\widehat{ECF}=\widehat{CAE}$), ils sont donc semblables.

Les sommets homologues de ces triangles sont :
$E\leftrightarrow E$
$C\leftrightarrow A$
$F\leftrightarrow C$
D'où les égalités de rapports : $\boxed{\frac{EC}{EA}=\frac{EF}{EC}=\frac{CF}{AC}}$. On note k la valeur commune à ces trois rapports.

3) **a.** Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Comme ABC est un triangle équilatéral, les hauteurs sont aussi médianes, donc H est le milieu de [BC], donc HC=3 cm.

D'après la formule rappelée dans l'énoncé, nous avons : $AH=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\ cm$

Comme H est le pied d'une hauteur dans ABC, les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires, et le triangle AHE est rectangle en H, il est donc possible d'utiliser le théorème de Pythagore, et nous avons :
$$\begin{aligned}AE^2&=AH^2+HE^2\\&=\left(3\sqrt{3}\right)^2+(3+2)^2\\&=27+25\\&=52=4\times13\end{aligned}$$
donc $\boxed{AE=2\sqrt{13}\ cm}$

b. Nous connaissons AE et EC, nous pouvons en déduire la valeur de k :
$k=\frac{EC}{EA}=\frac{2}{2\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$

Nous savons que si les côtés de deux triangles semblables sont dans le rapport k, alors leurs aires sont dans le rapport k².
Donc, pour obtenir l'aire du triangle ECF, il suffit de multiplier l'aire du triangle EAC par k^2

<u>Conclusion :</u> $A(ECF)=\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2\times A(EAC)=\boxed{\frac{A(EAC)}{13}=A(ECF)}$

c. Dans le triangle AEC, la hauteur issue de A est la droite (AH), donc :
$A(CEF)=\frac{CE\times AH}{2}=\frac{2\times3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\ cm^2$

<u>Conclusion :</u> $A(CEF)=\frac{3\sqrt{3}}{13}\ cm^2$

Exercice numéro 3 :

1. M est sur le segment [AB], donc x ne peut être compris qu'entre 0 et la longueur AB.

Conclusion : $I=[0;5]$

2. **a.** D'après la figure, nous avons :

A(MNPQ) = A(ABCD) – A(AMQ) – A(MBN) – A(NCP) – A(PDQ)

Or Q est sur le segment [AD], donc AQ+QD=AD donc AQ=AD-QD. Donc AQ=$3-x$

Donc $A(AMQ)=\dfrac{(3-x)x}{2}$

De même nous trouvons : $A(MBN)=\dfrac{(5-x)x}{2}$; $A(NCP)=\dfrac{(3-x)x}{2}$ et $A(PDQ)=\dfrac{(5-x)x}{2}$

D'où : $f(x)=15-(5-x)x-(3-x)x$

$=15-5x+x^2-3x+x^2$

Conclusion : $f(x)=2x^2-8x+15$

b. Développons le nombre 2(x-2)² + 7 :

$2(x-2)^2+7=2(x^2-4x+4)+7$

$=2x^2-8x+8+7$

$=2x^2-8x+15=f(x)$

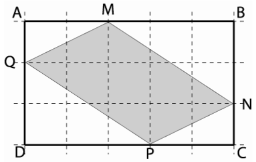
(on retrouve l'expression de f(x) obtenue au a)

Conclusion : $f(x)=2(x-2)^2+7$

c. Nous observons maintenant que f(x) est la somme d'un réel [7] et d'un carré [2(x-2)²]. Pour tout réel x de [0 ;5], on a 2(x-2)² ≥ 0 donc f(x) ≥ 7. De plus il est clair que f(2) = 7. 7 est donc le minimum de f sur [0 ; 5], et ce minimum est atteint en 2.

Conclusion : La valeur x_1 demandée est donc : $x_1=2$

d.



3. Pour calculer f($\sqrt{2}$) , nous utilisons la forme développée :

$f(\sqrt{2})=2\times(\sqrt{2})^2-8\sqrt{2}+15$

$=2\times2-8\sqrt{2}+15$

$\boxed{f(\sqrt{2})=19-8\sqrt{2}}$

Pour calculer f(2-$\sqrt{2}$) il est préférable d'utiliser la forme factorisée :

$f(2-\sqrt{2})=2(\cancel{2}-\sqrt{2}-\cancel{2})^2+7$

$=2\times(-\sqrt{2})^2+7$

$=2\times2+7$

$\boxed{f(2-\sqrt{2})=11}$

4. **a.** **On lit sur l'écran de la calculatrice les valeurs suivantes :**

x	0,25	0,5	0,75	1	$\sqrt{2}$	2-$\sqrt{2}$
$f(x)$	13,1	11,5	10,1	9	7,7	11

b. **Voici le tableau de variations de f :**

x	0	2	5
Variations de f	15 ↘	7	↗ 25

5. **a.** Résolution de l'équation : f(x) = 8 :

$f(x)=8$

$\Leftrightarrow 2(x-2)^2+7=8$

$\Leftrightarrow 2(x-2)^2=1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x-2=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\ \ ou\ \ x-2=-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x=2+\sqrt{\dfrac{1}{2}}\ \ ou\ \ x=2-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \ ou\ \ x=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Nous remarquons que ces deux valeurs de x sont dans l'intervalle I. En effet elles ont pour valeur approchée : 2,7 et 1,3.

Donc : $\boxed{S=\left\{2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$

<u>Interprétation géométrique :</u>

Le quadrilatère MNPQ a une aire égale à 8 pour exactement deux valeurs de x (trouvées ci dessus).

b. Résolution de l'équation f(x) = 6 :

$f(x)=6$

$\Leftrightarrow 2(x-2)^2+7=6$

$\Leftrightarrow 2(x-2)^2=-1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=-\dfrac{1}{2}$

Or un carré n'est jamais négatif. L'équation proposée n'a donc pas de solution.

$\boxed{S=\varnothing}$

NB : On savait que le minimum de f sur [0 ; 5] est 7 donc on pouvait prévoir qu'il n'y aurait pas de solution.

<u>Interprétation géométrique :</u>

Le quadrilatère MNPQ ne peut pas avoir une aire de 6

Exercice numéro 4 :

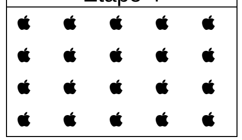
Nous remarquons que :

à l'étape **1**, il y a **1** ligne de 2 pommes

à l'étape **2**, il y a **2** lignes de 3 pommes

à l'étape **3**, il y a **3** lignes de 4 pommes

Etape 4



Nous pouvons conjecturer qu'à l'étape 4, nous allons obtenir 4 lignes de 5 pommes, c'est à dire 20 pommes :

Conclusion : Il y a 20 pommes à l'étape 4.

De même à l'étape 1000, nous pouvons conjecturer qu'il y aura 1000 lignes de 1001 pommes

Donc pour calculer le nombre de pommes il suffit de faire $1000\times1001=1001000$

Conclusion : Il y a 1 001 000 pommes à l'étape 1000.

De même à l'étape *n* (pour n entier naturel non nul), il y aura *n* lignes de *n+1* pommes.

Conclusion : Le nombre de pommes à l'étape *n* sera de $n\times(n+1)$

Exercice numéro 5 :

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	B	D	A	C	D	B	C	D	C