Corrigé - Deuxième devoir commun aux classes de secondes 110 min. lundi 11 février 08 -

Ex1 : Le tableau de variation d'une fonction f définie sur [-5 ;5] est donné ci-dessous.

1. On sait que f(-3) = 0.
a) Placer cette information dans le tableau de variation.
b) Donner le tableau de signe de f(x).

X	– 5		– 3		3		5
Signe f		–	0	+	0	+	

x	– 5		– 3		– 2		3		5
Var f	– 2	↗	0	↗	3	↘	0	↗	1

2) 2. Compléter par des nombres réels:

a) L'image de 3 est 0 b) L'antécédent de –2 est – 5.

c) Si $-2 < x < 3$ alors $0 < f(x) < 3$

d) Si $0 \leq f(x) \leq 3$ alors $-3 \leq x \leq 5$.

3. Compléter par : <, >, =

a) f(0) > f(1) b) f(-1) > -1

c) Le nombre b appartient à [3 ;5] :

f(b) < b f(b) < 2

Ex2 On donne les fonctions usuelles suivantes : f :x→2x-6 g :x→-3x+6 k :x→x²

h ↘ signifie que h est strictement croissante, h ↗ signifie h est strictement décroissante.

La fonction h : x→-3(2x-6)²+6 est strictement croissante sur]-∞ ;3[. Démonstration : Je suppose que a et b sont deux nombres réels vérifiant $a < b < 3$ Je veux démontrer que $h(a) < h(b)$ c'est-à-dire que $-3(2a-6)^2+6 < -3(2b-6)^2+6$

$a < b < 3$

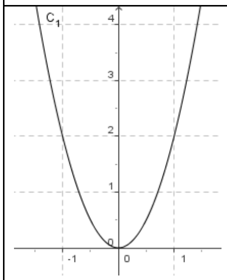
$2a - 6 < 2b - 6 < 0$ — la fonction f ↗ sur ℝ, conserve l'ordre

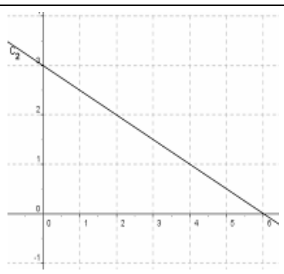
$(2a - 6)^2 > (2b - 6)^2 > 0$ — la fonction k ↘ sur]–∞ ; 0[, change l'ordre

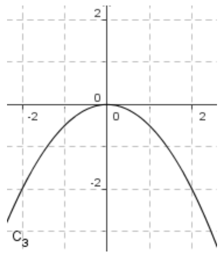
$-3(2a - 6)^2 + 6 < -3(2b - 6)^2 + 6$ — la fonction g ↘ sur ℝ, change l'ordre

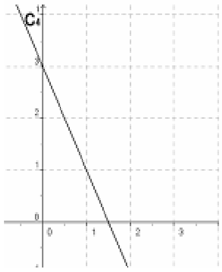
Ce qu'il fallait démontrer !!!

Ex 3 3 des 4 courbes (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) ci-dessous sont les courbes représentatives de 3 des 4 fonctions suivantes: f :x→3+2x g :x→3-0,5x i :x→-0,5x² j :x→2x²


Courbe C_1 x→ $2x^2$


Courbe C_2 x→ 3 - 0,5x


Courbe C_3 x→ $-0,5x^2$


Courbe C_4 x→ - 2x + 3

Associer chaque courbe à son expression ; pour la courbe « intruse » trouver son expression

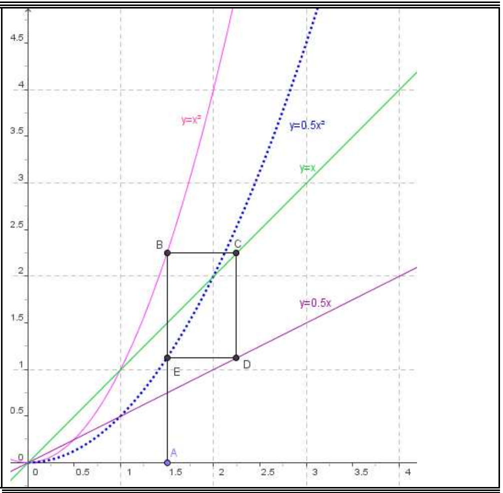
Les courbes (C_2) et (C_4) sont des droites, on peut penser les associer aux fonctions affines f, g.
f est une fonction affine croissante donc n'est associée à aucune des deux droites.
(C_2) est une droite de coefficient directeur - 0,5 , elle est donc associée à g.
Les courbes (C_1) et (C_3) sont des paraboles, on peut penser les associer aux fonctions i , j.
La fonction j a même sens de variation que la fonction carré donc elle est associée à la courbe (C_1) .
La fonction i est associée à (C_3) .
Pour trouver l'expression de la fonction affine associée à (C_4) . Cette droite a pour coefficient directeur a = - 2 et pour ordonnée à l'origine 3. Son équation est y = - 2x + 3

Ex4

1. A(1,5 ; 0)
B(1,5 ; 1,5²) soit B(1,5 ; 2,25) car B est sur la courbe y=x²
C(2,25 ; 2,25) car C est sur la droite d'équation y=x
D(2,25 ; 0,5×2,25) soit D(2,25 ; 1,125) car D est sur la droite d'équation y=0,5x
E (1,5 ; 1,125) car E a la même ordonnée que D et même abscisse que A.

2. A(a ; 0) B(a ; a²) C(a² ; a²) D(a² ; ; 0,5a²) E (a ; 0,5a²)

3. E ayant pour coordonnées (a ; 0,5a²), E se déplace sur la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 0,5x^2$



Ex5:

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

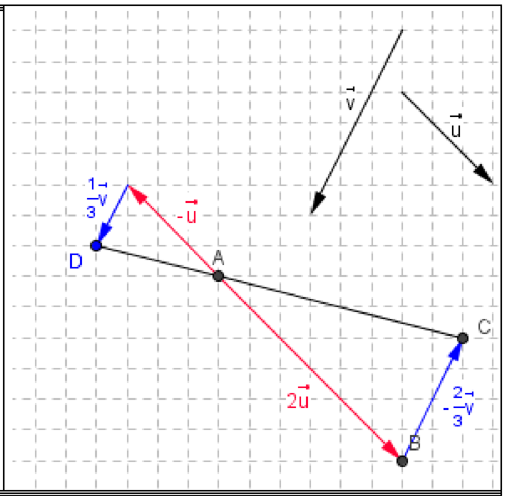
a) $\overrightarrow{AB} = a\,\vec{u}$ a = 2 b) $\overrightarrow{AC} = b\,\vec{u} + c\,\vec{v}$ b =2 c = $-\dfrac{2}{3}$

2. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = -\vec{u} + \dfrac{1}{3}\vec{v}$

3. Démontrer que les points A, C et D sont alignés : D'après 1) et 2) $\overrightarrow{AC} = 2\vec{u} - \dfrac{2}{3}\vec{v}$

et $\overrightarrow{AD} = -\vec{u} + \dfrac{1}{3}\vec{v}$, on en déduit que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont donc colinéaires et les points A, C et D sont alignés



Ex6

ABC est un triangle rectangle isocèle en A avec AB=AC=3.

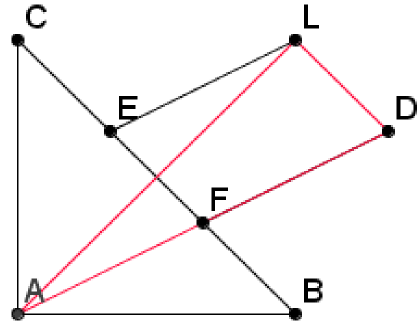
On considère le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).

1. A(0 ;0), B(1 ;0), C(0 ;1).
2. Placer le point E(1/3 ; 2/3) et démontrer que E est sur (BC).

$\overrightarrow{EB}\left(1-\dfrac{1}{3};0-\dfrac{2}{3}\right)$ soit $\overrightarrow{EB}\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$ $\overrightarrow{BC}(-1;1)$ On a donc $\overrightarrow{EB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires et les points E, B et C sont alignés

3. Construire D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$.



Pour montrer que $\overrightarrow{AD} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, on transforme $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

4. F milieu de [EB] a pour coordonnées

$\left(\dfrac{x_E + x_B}{2};\dfrac{y_E + y_B}{2}\right)$ soit $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

5. Tracer L tel que EFDL soit un parallélogramme
6. EFDL est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{LD}$

$\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\right)$ soit $\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{LD}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}-x_L;\dfrac{2}{3}-y_L\right)$ On en déduit que $\begin{cases}\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}-x_L\\ -\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}-y_L\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_L=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\\ y_L=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_L=1\\ y_L=1\end{cases}$ Les coordonnées de L sont (1;1).

7. Calculer les longueurs AL, AD, et LD.

$\overrightarrow{AL}(1;1)$ $\overrightarrow{AD}\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{LD}\left(\dfrac{4}{3}-1;\dfrac{2}{3}-1\right)$ soit $\overrightarrow{LD}\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

$AL = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\quad U$ (Une unité (U) vaut ici 3 cm)

$AD = \sqrt{\dfrac{16}{9}+\dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{20}{9}} = \dfrac{\sqrt{20}}{3}\quad U$

$LD = \sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{2}{9}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\quad U$

$AL^2 + LD^2 = 2 + \dfrac{2}{9} = \dfrac{20}{9}\quad U^2$ donc $AL^2 + LD^2 = AD^2$

$AD^2 = \dfrac{20}{9}\quad U^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ADL est rectangle en L

Ex7 :

Construire un point N tel que $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NL}$

Soit I le milieu de [KL] on a $\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NL} = 2\overrightarrow{NI}$

D'où $\overrightarrow{KM} = 2\overrightarrow{NI}$ ou encore $\overrightarrow{IN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MK}$