Correction du devoir commun de seconde. Février 2006

Exercice 1

Partie A

1. La longueur du grillage est AB + BC + CD. Cela fait $x+BC+x=20$ et donc BC = $20-2x$ ou $BC=2(10-x)$. Une longueur doit être positive, donc x et $10-x$ doivent être positifs ; cela se traduit par $x\geq 0$ et $x\leq 10$.
2. L'aire du rectangle s'exprime par AB×BC ou $x(20-2x)$ ou $20x-2x^2$.

Partie B

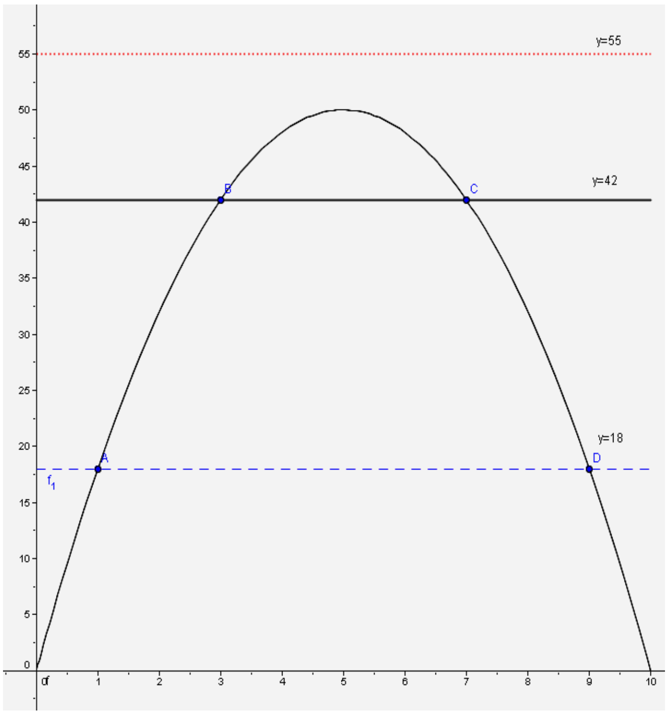
1. a) On peut choisir de partir de l'une ou l'autre des deux égalités, suivant la facilité qu'on y trouve. Par exemple,
   $-2(x-5)^2+50 = -2(x^2-10x+25)+50 = -2x^2+20x-50+50 = -2x^2+20x$.
   b) le nombre $(x-5)^2$ est positif donc $-2(x-5)^2$ est négatif. Ce dernier nombre est égal à $f(x)-50$. Ecrire $f(x)-50\leq 0$ ou $f(x)\leq 50$, c'est la même chose.
2. Soient deux réels a et b tels qu'on ait $0\leq \boldsymbol{a<b}\leq \mathbf{5}$. Alors
   * -5 ≤ a-5 < b-5 ≤ 0 (ajouter -5 aux membres d'une inégalité n'en modifie pas le sens)
   * $0\leq(b-5)^2 < (a-5)^2 \leq 25$ (élever au carré des nombres négatifs -≤0-change le sens)
   * $-50 \leq -2(a-5)^2 < -2(b-5)^2 \leq 0$ (multiplier par le réel négatif -2 change le sens)
   * $0\leq -2(a-5)^2+50 < -2(b-5)^2+50 \leq 50$ (ajouter 50 ne change pas le sens)
   On a donc $0\leq \boldsymbol{f(a)<f(b)}\leq 50$. Les implications qui conduisent de la première inégalité en caractères gras à la seconde établissent que *f* est une fonction croissante sur l'intervalle [0 ; 5].
3. $f(0)=0$; $f(5)=50$, $f(10)=0$ donc le tableau est
4.

x	0	5	10
f	0 ↗	50	↘ 0

Conseil pour le tableau qui suit : Sur une calculatrice TI, dans **[Y=]** mettre Y1:-2X²+20X puis dans **[TBLSET]**, attribuer 0 à **TblStart** et la valeur 0.5 à Δ**Tbl**. Le tableau est prêt dans **[TABLE]**

x	0	1	2	3	4	4,5
$f(x)$	0	18	32	42	48	49,5
x	5	5,5	6	7	8	9
$f(x)$	50	49,5	48	42	32	18

5. Les solutions sont visibles aussi bien dans le tableau que le graphique : x
* *f(x)*=42 correspond aux points notés B et C sur le dessin, donc $x=3$ ou $x=7$. L'ensemble des solutions est {3 ; 7}
* *f(x)* = 55 n'a pas de solution ou : l'ensemble des solutions est {}
* $f(x)\geq 42$ entre les abscisses des points B et C, soit x élément de l'ensemble des solutions [3 ; 7].
* *f(x)*<18 ; c'est le cas à gauche du point A et à droite du point D donc x élément de [0 ; 1[∪]9 ; 10]



Partie C

1. Selon le tableau de valeurs l'aire est de 48 m² si le côté AB mesure 4 m (et le côté BC 12 m) ou si AB mesure 6 m (et le côté BC 8 m)
2. L'aire ne peut dépasser 50 m² donc 52 m² est une valeur jamais atteinte..
3. Comme on peut l'observer sur le graphique ou à partir de la question 1 de la partie B, l'aire maximum est de 50 m² quand AB mesure 5 m (et BC 10 m)

Exercice 2

1. Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et donc $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$ ou encore (-2 $\vec{i}$ - $\vec{j}$) - (-3 $\vec{i}$ + 5 $\vec{j}$) = (3 $\vec{i}$)- $\overrightarrow{OD}$. Donc $\overrightarrow{OD}$ = 2 $\vec{i}$ + 6 $\vec{j}$ qui exprime que les coordonnées de D sont (2; 6).
2. M est le milieu de [AC] donc $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})/2$. On obtient M: (0 ; 2,5).
3. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=5\vec{i}+\vec{j}$ .et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=10\vec{i}+2\vec{j}$. On a $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BC}$; ceci établit que les deux vecteurs sont colinéaires et utilisent le même point B ; les trois points sont donc alignés et C est au milieu.
4. $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}=-6\vec{i}+5\vec{j}$ alors que $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=-6\vec{i}+5\vec{j}$. On a $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CA}$ ce qui prouve à la fois que (BF) et (AC) sont parallèles mais aussi que BFAC est un parallélogramme.
5. $AB=\sqrt{(-2+3)^2+(5+1)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$. On calcule selon la même méthode BC et AC et on trouve $BC=\sqrt{26}$ et $AC=\sqrt{61}$.
6. Essayons maintenant le théorème de Pythagore :AC² = 61, AB² + AC² = 37 + 26 = 63. En absence d'égalité, on peut déduire que le triangle ABC n'est pas rectangle.

Exercice 3.

Un nombre divisible par 30 doit être divisible par 10 et par 3. Pour être divisible par 10, le chiffre des unités doit être 0. Pour être divisible par 3, la somme des quatre chiffres doit être multiple de 3. Si on appelle *m* le chiffre des milliers, il faut donc que m+2+3+0 soit multiple de 3. Les chiffres qui conviennent sont 1, 4 et 7. Les nombres qui sont solutions de cet exercice sont donc 1230, 4230 et 7230.

Exercice 4

Question 1 : la réponse est **d)** car 0 possède quatre antécédents, un pour chaque intervalle ou la fonction est monotone et change de signe.
Question 2 : la réponse est **d)** car g(-3) est inférieur ou égal à g(-2) et g(-2,5) (valeurs d'un intervalle où la fonction est monotone croissante) et, quant à g(1), il ne peut être comparé à g(-3) ; tout ce qu'on sait est que ces valeurs sont inférieures à 1/2.

Exercice 5

Conjecture connue et ancienne, objet de recherches jusqu'à ce qu'on s'avise que si n=41, le nombre N est multiple de 41 (c'est alors 41²-41+41=41²) et n'est donc pas premier.
Dans ce type d'exercice sans guide, il est raisonnable de faire des essais comme :

- Si n=2 alors N=43, nombre premier
- Si n=3, alors N=47, nombre premier
- Si n== 5 alors N=61, nombre premier
- …

Mais c'est long et l'ensemble des nombres premiers est infini ! Après, il faut réfléchir… mais si on n'a que ces exemples à proposer, **il faut les écrire**.