1ère S 11 ~ mars 2003 ~ Quelques repères à propos des limites de fonctions.

[1]Limite en 0 (ou plus généralement en a, a ∈ ℝ.)

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ [*sens : « Le réel f(x) (ici : $\frac{1}{x^2}$) dépasse tout nombre arbitrairement fixé, dès que x est suffisammen proche de 0 »*]

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas, mais la limite de $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est $+\infty$ en zéro à droite et $-\infty$ en zéro à gauche.

Plus généralement, on retiendra :soit f une fonction définie sur un intervalle contenant le réel a et telle que f(a) = 0. Si, pour x voisin de a, $x \neq a$, on a f(x)>0 alors $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. (On a de même $-\infty$ si f(x) < 0 pour x voisin de a)

En particulier : $x \rightarrow \frac{1}{x}$; $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$ ont pour limite $+\infty$ en 0 à droite et $-\infty$ en 0 à gauche.

$x \rightarrow \frac{1}{x^2}; x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}; x \rightarrow \frac{1}{|x|}$; ont pour limite $+\infty$ en 0

Limites en +∞

$x \rightarrow \sqrt{x}; x \rightarrow x; x \rightarrow x^2; x \rightarrow x^3; x \rightarrow |x|$ **ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (pour la limite en $-\infty$, on « adapte » les résultats !!)**

$x \rightarrow \frac{1}{x}; x \rightarrow \frac{1}{x^2}; x \rightarrow \frac{1}{x^3}; x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}; x \rightarrow \frac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $+\infty$ (pour la limite en $-\infty$, on « adapte » les résultats !!)

NB : Si une fonction f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$), alors la fonction $\frac{1}{f}$ a pour limite 0. Attention la réciproque est fausse !

Opérations .

Pour toute fonction f , on peut écrire le nombre f(x) sous la forme d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient, etc. Quand on « passe à la limite » , on parle de « formes » [ex $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{\frac{1}{x} - 1}$ est de la forme « $\frac{\infty}{-1}$ », la limite est $-\infty$.] Certaines formes sont « déterminées », cela signifie que la limite ne peut prendre qu'une (ou deux ou trois) valeurs possibles. Ces formes correspondent aux tableaux des pages 130 et 131. La « bonne » limite doit vous être « évidente ». En voici quelques unes (l désigne un réel **non nul**):***(voir tableau page suivante !)***

Forme	« $\frac{0}{\infty}$ »	« $\frac{1}{\infty}$ »	« $\frac{\infty}{0}$ »	« $\infty + \infty$ »	« $1 \times \infty$ »	« $\frac{1}{0}$ »
limite	0	0	$+\infty ou -\infty$	$+\infty$	$+\infty ou -\infty$	$+\infty ou -\infty$ ou pas de limite

Les autres formes sont dites « formes indéterminées » (FI). La limite peut être n'importe quoi suivant les exemples. Il n'y en a que 4 : $"\infty - \infty";"\frac{0}{0}";"\frac{\infty}{\infty}";""0 \times \infty"$. En général, on arrive à la limite après transformation astucieuse de l'écriture de f(x).

Résultats relatifs aux asymptotes :

Idée : Étant donnée une fonction f et C_f sa représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on se demande ce que devient la courbe C_f « ***loin de l'origine du repère*** » ?

Asymptote horizontale Quand la fonction f vérifie la propriété $\lim\limits_{x \to \infty}$ f(x) = a (avec a réel), on dit que la droite d'équation y=a est asymptote horizontale à C_f en + ∞ (définition analogue en - ∞)

NB : Si, pour x suffisamment grand, on a f(x) ≥ a, alors la courbe est « au dessus » de son asymptote.

Asymptote verticale Quand la fonction f vérifie la propriété (avec a réel) $\lim\limits_{x \to \infty}$ f(x) = $+\infty$ (ou bien - ∞ . Ou bien seulement la limite à droite ou la limite à gauche en a) on dit que la droite d'équation x=a est asymptote verticale à C_f.

Asymptote oblique a et b sont deux réels avec a ≠ 0. Quand la fonction f vérifie la propriété $\lim\limits_{x \to \infty}$ f(x) - [ax + b] = 0 , on dit que la droite d'équation y= ax+b est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ (définition analogue en - ∞)

NB : Le tracé des asymptote est une riche indication pour guider le tracé de la courbe. Ne l'oubliez pas !!