$1^{ère}$ S ~ Comprendre la signification de « implique » et « équivaut à » .

EXEMPLES D'IMPLICATIONS

EX :1 L'affirmation : **Si** (ABCD) est un carré, **alors** (ABCD) est un rectangle
peut s'écrire :(ABCD) est un carré $\Rightarrow$ (ABCD) est un rectangle
on lit : (ABCD) est un carré **implique** (ABCD) est un rectangle.
ou bien : pour que (ABCD) soit un rectangle, **il suffit** que (ABCD) soit un carré,
ou encore : **Si** (ABCD) **n'est pas** un rectangle, **alors** (ABCD) **ne peut pas** être un carré.
on peut dire : pour que (ABCD) soit un carré **il faut** [ou : **il est nécessaire**] que (ABCD) soit un rectangle

EX :2 a et b étant deux réels :l'affirmation : ' **Si** a= b **alors** $a^2 = b^2$ '
peut s'écrire : ' $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ 'On peut aussi dire : ' pour que $a^2 = b^2$, **il suffit** que $a = b$ '
ou encore : ' pour que a = b , **il faut** que $a^2 = b^2$ '.

EXEMPLES D'ÉQUIVALENCES :

EX :3 **Si** (ABCD) est un parallélogramme, **Alors** [AC] et [BD] ont le même milieu.
et réciproquement : **Si** [AC] et [BD] ont le même milieu, **Alors** (ABCD) est un parallélogramme.
On dit alors : (ABCD) est un parallélogramme **équivaut à** [AC] et [BD] ont le même milieu.
Cela peut s'écrire : (ABCD) est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ [AC] et [BD] ont le même milieu.
On peut dire aussi : (ABCD) est un parallélogramme **si et seulement si** [AC] et [BD] ont le même milieu.
Ou encore :Pour que (ABCD) soit un parallélogramme **il faut et il suffit** que [AC] et [BD] aient le même milieu.

EXERCICES

Exercice 1: Pour chacun des couples (P,Q) proposés, indiquer si l'on a : $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$, $P \Leftrightarrow Q$, ou aucune implication entre P et Q, puis rédiger toutes les phrases possibles, utilisant les termes « si ...Alors », « il suffit » , « Il faut », « si et seulement si » , « il faut et il suffit » :

1. x étant un nombre réel, P : x est inférieur à 2 Q : x est différent de 3
2. A et B étant deux points distincts et M un point quelconque du plan,
   P : M appartient à la médiatrice de [AB] Q : MA = MB
3. x étant un réel, P : $x(x+1) = 0$ Q : $x = -1$
4. x étant du entier naturel, P : x est un nombre premier Q : x est impair
5. a et b étant deux nombres réels : P : $ab = 0$ Q : $a = 0$ et $b = 0$
6. x étant un entier naturel : P : x est un multiple de 3 Q : x est un multiple de 6
7. x étant un entier : P : $(x-2)(8-x) = 0$ Q : x est pair

Exercice 2:Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et dans le cas où elles sont vraies, donner une autre formulation utilisant « Si ... Alors ». (dans tous ces énoncés x et y désignent des nombres réels.)

1. Pour que x soit inférieur à 3 il suffit qu'il soit inférieur à 4.
2. Pour que x soit inférieur à 3 il faut qu'il soit inférieur à 4.
3. Pour que $x^2 = 3x$, il faut que $x = 3$.
4. Pour que $x^4 - 7x^3 + 23x = 0$ il suffit que $x = 0$.
6. y étant positif, pour que $x = \sqrt{y}$ il faut que $x^2 = y$
6. y étant positif, pour que $x = \sqrt{y}$ il suffit que $x^2 = y$
7. Pour que xy =1, il suffit que $x = y = 1$.
8. pour que $f : \longmapsto x^2$ soit définie en α , il suffit que $\alpha < 0$.
9. pour que $f : \longmapsto x^2$ soit définie en α , il faut que $\alpha > 0$.
10. Pour que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ soit définie en α , il faut que $\alpha \geq 0$