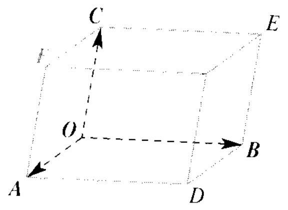
1S15

Principaux résultats relatifs aux vecteurs dans le plan ou l'espace rapporté à un repère

Dans le plan ou dans l'espace vous devez savoir la signification géométrique (points, droites, figures…) des affirmations vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{AM} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$; k est un réel , $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$; k est un réel , $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; $\|\overrightarrow{AM}\| = r$ (A est un point donné et r est un réel positif) ;

Barycentre : La définition s'étend sans difficulté à l'espace. si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, l'égalité $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ définit le barycentre G. (A, B, C sont trois points de l'espace. s'ils ne sont pas alignés, ils définissent un plan. Notez que G est un point de ce plan).
La notion de barycentre partiel est très utile dans l'espace.



Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ Cette égalité est vraie pour des points A, B, et C quelconques de l'espace

Somme de 3 vecteurs non 2 à 2 colinéaires : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
On obtient un parallélépipède. (faire la figure)

Particularités vectorielles : On admet que tout vecteur est colinéaire au vecteur nul.
Deux vecteurs sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction (dans ce cas il existe un réel k tel que l'un est « k fois » l'autre.)
Deux vecteurs sont dits orthogonaux lorsque leurs directions sont orthogonales. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Un point et deux vecteurs non colinéaires définissent un plan. On le note $(A;\vec{u};\vec{v})$. Cela doit vous rappeler la notion de « repère dans un plan ». Vous savez qu'il existe pour tout point M de ce plan, un couple de réels (x, y) tels que : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ Retenez cette égalité qui caractérise l'appartenance d'un point M au plan $(A;\vec{u};\vec{v})$.

Vecteurs coplanaires : Soit $\vec{u};\vec{v};\vec{w}...$ des vecteurs et O un point. On note A, B, C … les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u};\overrightarrow{OB} = \vec{v};\overrightarrow{OC} = \vec{w}...$. On dit que les vecteurs $\vec{u};\vec{v};\vec{w}...$ sont coplanaires lorsque les points O, A, B, C, …. sont dans un même plan. De la propriété ci-dessus on déduit : Soit $\vec{u};\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, $\vec{u};\vec{v}\,et\,\vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Coordonnées dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ (*voir la définition page 200*), le triplet des coordonnées d'un point M (ou d'un vecteur $\vec{u}$) est l'unique triplet vérifiant $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (ou $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$)

Soit deux points A(x,y,z) et B(x',y',z') dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Alors
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (x'-x , y'-y , z'-z) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Le milieu de [AB] a pour coordonnées $(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2};\frac{z+z'}{2})$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Opérations et coordonnées

Soit $\vec{u}(x;y;z)\,et\,\vec{v}(x';y';z')$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, alors $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y';z+z')\,et\,k\vec{u}(kx;ky;kz)$. On a de plus les équivalences : $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow$ x = y = z. et $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow$ x=x' ; y=y' ; z = z'.
On a aussi : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et de façon analogue : AB = $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Produit scalaire La définition s'étend sans difficulté à l'espace, en particulier avec les notations ci-dessus : $\vec{u}.\vec{v}$ = xx' + yy' + zz'.