Notion de nombre dérivé d'une fonction en un point.

I- Vocabulaire

Soit f une fonction **définie sur un intervalle I**, **a un réel de I**, et h un réel **non nul** tel que $a+h \in I$.
l est un réel.

On peut toujours définir une fonction φ par $\varphi(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - l$

On peut aussi écrire : $f(a+h) = f(a) + hl + h\varphi(h)$.

On a alors l'équivalence : $\lim \varphi = 0$ [1] $\Leftrightarrow$ $\lim \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$ [2]

Définition :
Une fonction f qui vérifie la relation [1] ou [2] est dite **dérivable en a** [ou : dérivable au point a]
Le nombre l qui apparaît est appelé : **le nombre dérivé de f en a**.
L'égalité $f(a+h) = f(a) + hl + h\varphi(h)$ est appelée : « **développement limité (DL) de f en a à l'ordre 1** »
Quand la fonction φ vérifie la propriété [1], on dit que « **le terme hφ(h) est négligeable devant h pour h voisin de zéro** ».

Propriété [*bien voir le sens, ce n'est pas évident* !] Si f est dérivable en a alors, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(a)$.
Exemple : Soit la fonction $f : x \longmapsto 3x^2$. Prenons a = 1. On a $f(1+h) = 3 + 6h + 3h^2$. La fonction φ est ici : $h \longmapsto 3h$ et on a bien $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0$. On en déduit que f est dérivable en 1 et que le nombre dérivé de f en 1 est 6. Vous pouvez aussi calculer la limite quand h tend vers 0 de $h \longmapsto \dfrac{f(1+h) - f(h)}{h}$ et vous trouverez 6. **NB** : On a bien : la limite de f en 1 est f(1), c'est à dire 3.

II Diverses interprétations

f, définie sur un intervalle I, est dérivable en a [$a \in I$], et on note l son nombre dérivé en a.

a- Point de vue graphique

Définition : On appelle tangente en M_0 (a, f(a)) à la courbe C [représentant f dans un repère $(O ; \vec{i}; \vec{j})$] la droite passant par M_0 et de coefficient directeur l.
Son équation est alors : $y = l(x - a) + f(a)$.

b- Point de vue numérique

On sait qu'il existe une fonction φ telle que :$f(a+h) = f(a) + hl + h\varphi(h)$ avec :$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0$. La fonction affine $h \longmapsto f(a) + lh$ [ou $x \longmapsto f(a) + lx$] permet d'obtenir une valeur approchée de f(a+h) pour h voisin de 0. Elle est appelée : **approximation affine locale de f(a+h).**
Exemple [*suite du précédent*]: une valeur approchée de $3\times0{,}998^2$ est $f(1) - 0{,}002\times6$, soit 2,988. [ici h = -0,002 car 0,998 = 1 – 0,002]

c- Point de vue cinématique

Un mobile M se déplace sur un axe, d'origine O. On note t la date et f(t) l'abscisse de M dans un repère d'origine O, à la date t. Soit a une date. Le nombre l, nombre dérivé de f en a, est la vitesse instantanée du mobile M, à l'instant a.