

1- Résultats fondamentaux (admis)

f est une fonction dérivable sur un intervalle I . On note f' la dérivée de f .

- Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive sur I , sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors, f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I , sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors, f est strictement décroissante sur I .

EX1 : Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ du polynôme $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 12$.

Méthode :

- On s'assure de la dérivabilité de f
- On calcule puis étudie le signe [par factorisation, en général] de f' .
- On fait apparaître les valeurs qui annulent la dérivée.

Les théorèmes précédents permettent en général de remplir le tableau de variation. Il ne reste plus qu'à chercher les « limites aux bornes de D_f »

EX2 : Variations de $f: x \mapsto x - 2 + 1/x$

2- Notion d'extremum local.

f est une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

Déf (rappel): $f(a)$ est LE maximum de f **sur I** ssi pour tout x de I on a : $f(x) \leq f(a)$

Déf (nouvelle !) $f(a)$ est UN maximum **local** de f ssi il existe **un intervalle ouvert J** , contenu dans I (et contenant a) tel que $f(a)$ soit le maximum de f **sur J** .

NB : La définition peut s'étendre au cas où $I = [a; b]$ (a est une borne de I), en remplaçant « un intervalle ouvert » par $[a; \alpha[$, avec $\alpha \in]a; b]$

NB : De façon analogue, on définit un *minimum local*.

Deux théorèmes admis :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et a un réel de I . Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

NB : *Observez que la réciproque est fautive ($x \mapsto x^3$ est un contre-exemple). Interprétez graphiquement !*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et a un réel de I . Si la dérivée f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a (qui est $f(a)$!).

EX3 : Extremums locaux de $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 2$.

3- Notion de bijection.

Déf : On dit qu'une fonction f réalise (est) une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J pour exprimer que :

- f est définie sur I et à valeurs dans J [pour tout x de I on a : $f(x) \in J$]
- pour tout réel λ de J , l'équation $f(x) = \lambda$ admet exactement une solution dans I

EX4 : $x \mapsto x^2$ réalise une bijection de $[-1; 0]$ sur $[0; 1]$ mais pas de $[-1; 1]$ sur $[0; 1]$

On admet les deux théorèmes suivants :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$.

Si, pour tout x de $]a; b[$ on a $f'(x) > 0$, alors f réalise une bijection [strictement croissante] de $[a; b]$ sur $[f(a); f(b)]$.

Si, pour tout x de $]a; b[$ on a $f'(x) < 0$, alors f réalise une bijection [strictement décroissante] de $[a; b]$ sur $[f(b); f(a)]$.

NB : f' peut s'annuler en a ou en b .

Application à la recherche des solutions des équations.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. Si f' est **strictement positive** ou strictement négative sur $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont **de signe contraire**, alors l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]a; b[$.

EX5 : Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une solution unique x_0 dans $] -1; 1[$. Donner un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-1} .