1S14 ~ Mathématiques ~ DS N° 5 ~ fait en classe le 26 janvier 2006. ~ PS et Dérivation.

Exercice 1 (1,5+2) : Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f ' sa dérivée. On admet que f '(1) = 100.

1- Soit T un réel strictement positif . Montrer que si T est une période de f, alors T est aussi une période de f '. Que pensez-vous de la réciproque ?

2- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par g : x $\mapsto$ f(3-2x). Etablir que g est dérivable au point 1 et calculer g'(1) par deux méthodes : En utilisant d'abord les théorèmes puis en utilisant la définition du nombre dérivé d'une fonction.

Exercice 2 (3,5 points)**:** *(trois mini exercices indépendants, autour de la dérivation)*

a- Proposer un <u>schéma</u> de la représentation graphique d'une fonction f (on se limitera à x compris entre 0 et 5) qui vérifierait les propriétés suivantes: f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour n entier, on a f(n) = n et f '(n) = -1

b- On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f : x $\mapsto$ $x^4 - 6x^2 + 8x + 1$. Vérifier qu'on a f '(-2) = 0 et en déduire tous les extremums locaux de f.

c- Pour $x \geq 0$, comparer $\sqrt{1+2x}$ et 1 + x.

Exercice 3 (3,5 points)**:** Le triangle ABC est isocèle de sommet A. On donne AB = AC = 1. Le but de l'exercice est de déterminer les particularités du triangle ABC dont l'aire est maximale.

<u>(1ère approche</u> (une impasse !))

1- On note 2x la longueur de la base [BC]. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de x seul. Pourquoi sommes-nous dans une « impasse » ??

<u>(2ème approche</u>.)

2- Préliminaires : Résoudre dans l'intervalle [0 ; π/2] les équations et inéquations suivantes (*on pourra utiliser un cercle trigonométrique)*:

a- cosx = sinx. b- cosx – sinx > 0 c- cosx + sinx > 0.

3- On note α la mesure en radians de l'angle géométrique ABC. Déterminer la valeur de α qui rend maximale l'aire de ce triangle ABC. Conclure.

Exercice 4 (3,5 points): On note (E) l'équation : x (cosx) + 1 = x²/2 + sinx.
Déterminer le nombre de solutions de cette équation (*merci d'expliquer clairement* !). On notera α celle qui est strictement positive. Donner à l'aide de vos machines un encadrement de α d'amplitude 10^{-4}.*(avec quelques explications)*

Exercice 5 (3 points)**:a-** retrouver par un calcul le résultat valable pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

b- A et B sont deux points distincts tels que AB = 6. Déterminer le lieu des points M tels que MA² - 4MB² = 0 (*on pensera à introduire des barycentres et on pourra utiliser le résultat du a- !)* Représenter ce lieu.

Exercice 6 (3 points) **:** On se place dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

1- Soit a, b et c trois réels (on supposera a et b non nuls pour simplifier la rédaction). Etablir que si une droite d a pour équation ax+by+c = 0 alors un vecteur normal à d est le vecteur $\vec{n}$ (a ;b).

2- Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle C qui passe par les points A(1 ; 3), B(-1 ; 4) et dont la tangente en A a pour équation x + y - 4 = 0 . [*Vous adopterez <u>la méthode de votre choix</u>, mais la condition « Ω est le centre d'un cercle passant par A et B » peut être traduite simplement par la nullité d'un produit scalaire. On peut aussi traduire vectoriellement l'affirmation : « la droite d'équation x+ y-1 = 0 est tangente en A à un cercle de centre Ω »*…]

1S14 ~ Mathématiques CORRECTION du DS5 fait en classe le 26 janvier 2006.

<u>Exercice 1</u> : 1- Si T est une période de la fonction f, alors pour tout réel x on a l'égalité : f(x+T) = f(x). On sait que x $\mapsto$ f(x+T) est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction du type x $\mapsto$ U(ax+b)) sa dérivée est x $\mapsto$ f '(x+T) (ici « a=1 »). La dérivée de la fonction nulle x $\mapsto$ f(x+T) – f(x) est donc x $\mapsto$ f '(x+T) – f '(x), comme c'est la fonction nulle, on a bien établi : pour tout réel x, f '(x+T) = f '(x) ce qui signifie que T est une période de f '.
La réciproque est fausse. La fonction f : x $\mapsto$ x est un contre exemple. f' est une fonction constante donc périodique de période 1 (tout réel est période, je prends T = 1 arbitrairement) et f ne l'est pas [pour tout réel x et tout réel y avec x ≠ y, on a f(x) ≠ f(y) alors …].

2- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par g : x $\mapsto$ f(3-2x). g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car g est de la forme « x $\mapsto$ U(ax+b) » avec U dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut d'abord calculer sa dérivée avec les théorèmes habituels : g'(x) = -2f'(3-2x). et on a donc g'(1) = -2f'(3-2) = -2f'(1) = -200. En utilisant la définition du nombre dérivé d'une fonction, on est amené à chercher la limite en 0 du taux [f(3-2(1+h))-f((3-2)]/h. (ou bien [f(1-2h)-f(1)]/h). On sait que f est dérivable en 1 donc que la limite en 0 du taux [f(1+u)-f(1)]/u est f'(1) = 100. Ici il suffit d'appliquer ce dernier résultat pour u = -2h et le taux s'écrit alors : [f(1-2h)-f(1)]/h = [f(1-2h)-f(1)]/(-2h) × (-2) dont la limite en 0 est f'(1) × (-2) soit : -2f '(1) = -200.

<u>Exercice 2</u> *:* a- Trop dur à faire sur l'ordinateur (???)

b- On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f : x $\mapsto$ $x^4 - 6x^2 + 8x + 1$. f est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, on a $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$. Il est clair que f '(-2) = 0 et on peut donc factoriser par (x+2). Il existe donc 3 réels a, b et c tels que f'(x) = (x+2)(ax²+bx+c). On développe et on identifie avec la forme connue de f'(x) et on obtient a = 4 ; b= -8 et c = 4. On peut donc écrire f'(x) = 4 (x+2)(x²-2x+1) = 4(x+2)(x-1)². La dérivée s'annule pour deux valeurs :-2 et 1 mais elle ne change de signe que pour x=-2. f admet donc un seul extremum local, pour x = -2.

c- Pour $x \geq 0$, comparer $\sqrt{1+2x}$ et 1 + x. On peut faire un simple calcul algébrique en factorisant la différence $\sqrt{1+2x}$ - (1 + x), à l'aide de « l'expression conjuguée ». On obtient : [1+2x –(1+x)²] / [$\sqrt{1+2x}$ + (1 + x)], c'est à dire –x²/[$\sqrt{1+2x}$ + (1 + x)] qui est négatif dès que le radical existe c'est à dire $x \geq -1/2$. (*on trouve « mieux » que ce qui est demandé !) Maintenant, si vous ne savez pas calculer …. vous pouvez faire confiance à cette bonne vieille dérivée* ! Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞[par x $\mapsto$ $\sqrt{1+2x}$ - (1 + x). f est dérivable sur [0; +∞[et sa dérivée est x $\mapsto$ $1/\sqrt{1+2x}$ - 1 qui s'écrit aussi (1-$\sqrt{1+2x}$)/$\sqrt{1+2x}$. Son signe est celui du numérateur. Pour x > 0 on peut considérer comme évident que 1+2x > 1 et comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}$+, on peut conclure que la dérivée est strictement négative sur] 0; +∞[donc f est strictement décroissante sur [0; +∞[. De plus f(0) = 0 donc pour x > 0, on a bien f(x) < 0 c'est à dire $\sqrt{1+2x}$ < 1 + 2x (avec égalité pour x = 0.)

<u>Exercice 3</u> Le triangle ABC est isocèle de sommet A. On donne AB = AC = 1. Le but de l'exercice est de déterminer les particularités du triangle ABC dont l'aire est maximale.

<u>1ère approche</u> On note 2x la longueur de la base [BC]. L'aire du triangle ABC est donc x $\sqrt{1-x^2}$. Si nous introduisons la fonction correspondante, nous ne savons pas la dériver. (Il apparaît un facteur écrit avec un radical et qui n'est pas de la forme $\sqrt{ax+b}$)

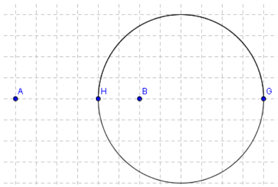
<u>2ème approche</u> Résoudre dans l'intervalle [0 ; π/2] les équations et inéquations suivantes :
Résolution de cosx = sinx dans $\mathbb{R}$: cosx = sinx ⇔ cosx = cos (π/2 –x) ⇔ {x = (π/2 –x) [2π] ou x = -(π/2 –x) [2π]} ⇔ x = π/4 + kπ avec k ∈ $\mathbb{Z}$. Pour nous la seule solution dans [0 ; π/2] est π/4.
Résolution dans [0 ; π/2] de cosx – sinx > 0 : Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient S = [0 ; π/4[

Résolution dans $[0 ; \pi/2]$ de $\cos x + \sin x > 0$: $S = [0 ; \pi/2]$ car sur $[0 ; \pi/2]$, sin et cos sont positives !

On note α la mesure en radians de l'angle géométrique ABC. L'aire du triangle ABC s'exprime alors par : $\cos\alpha \times \sin\alpha$. Soit f la fonction définie sur $[0 ; \pi/2]$ par $f : x \mapsto \cos x \times \sin x$. f est dérivable sur $[0 ; \pi/2]$ et $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$. Les résultats « préliminaires » nous donnent le signe de la dérivée. (strictement positive sur $[0 ; \pi/4[$ et strictement négative sur $]\pi/4 ; \pi/2]$. Un tableau de variation résume ces résultats (faites le) et permet de conclure que l'aire du triangle ABC est maximale pour $\alpha = \pi/4$. Le triangle ABC est alors rectangle et isocèle en A.

NB : avec ce que nous savons maintenant sur sinus et cosinus, l'étude du signe peut être simplifiée !Reprenez les calcul après avoir transformé f'(x).

<u>Exercice 5</u> (3 points)**:** **a-** Nous savons que pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout vecteur $\vec{v}$ on a : $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ (sachez faire le calcul !)



b- A et B sont deux points distincts tels que AB = 6. Transformons le nombre : $MA^2 - 4MB^2$. On note G le barycentre de (A,1) et (B,-2), et H celui de (A,1) et (B,2),. $MA^2 - 4MB^2 = (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = (3\overrightarrow{MH}).(-\overrightarrow{MG}) = -3\,\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MG}$.

On a donc les équivalences : $MA^2 - 2MB^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow$ M est un point du cercle de diamètre [GH]. Le lieu demandé est ce cercle de diamètre [GH].

<u>Exercice 6</u> : 1- On se place dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

Soit la droite d d'équation $ax+by+c = 0$ (a et b non nuls). Choisissons deux points distincts de cette droite, par exemple $A(0 ; -c/b)$ et $B(-c/a ; 0)$. Un vecteur directeur de d est donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le vecteur $\vec{n}$ (a ;b) sera normal à d ssi il est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. On a l'équivalence : $\vec{n}$ est normal à d $\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$. Calculons ce PS : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = a(-c/a) + b(c/b) = -c + c = 0$. On peut conclure.

2- Le centre Ω du cercle C qui passe par les points $A(1 ; 3)$, $B(-1 ; 4)$ est sur la médiatrice de [AB]. Le point Ω vérifie donc $\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{AB} = 0$ (en notant I le milieu de [AB].) Si on note (x,y) les coordonnées de Ω cette condition s'écrit (faites les calculs) : $2x + 7/2 - y = 0$

On nous dit en plus que la tangente en A a pour équation $x + y - 4 = 0$. On sait que $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal à cette tangente. On vient de voir qu'un vecteur normal à cette droite est $\vec{n}(1 ;1)$. Le point Ω est donc tel que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires. Ecrivons donc que leur déterminent est nul, c'est à dire (faites les calculs) : $1 - x = 3 - y$ ou bien $x - y + 2 = 0$. Il ne reste plus qu'à résoudre le système :

$\begin{cases} 2x - y + \frac{7}{2} = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ On trouve : $\Omega(-3/2 ; 1/2)$

<u>Exercice 4</u> Soit (E) l'équation : $x(\cos x) + 1 = x^2/2 + \sin x$. Introduisons la fonction $f : x \mapsto x(\cos x) - x^2/2 - \sin x + 1$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $f'(x) = \cos x - x\sin x - x - \cos x = -x(\sin x + 1)$.

Cette dérivée s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 3\pi/2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. mais elle est du signe de $-x$ car pour x réel $\sin x + 1 \geq 0$. Sur $\mathbb{R}+$, on est dans le cas où « f' est strictement négatif sauf en des valeurs isolées où elle s'annule ». f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}+$. De même on établirait que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}-$. Nous avons $f(0) = 1$; $f(\pi/2) = -\pi^2/8$; $f(-\pi) = \pi - \pi^2/2 + 1$ (voisin de -0,8). L'équation a donc exactement deux solutions, l'une entre $-\pi$ et 0, l'autre entre 0 et $\pi/2$. Cherchons un encadrement de la positive à la machine. Je trouve : f(1,1013) voisin de 0,000041927 et f(1,1014) voisin de -0.000166428. la solution est donc dans l'intervalle]1,1013 ; 1,1014[.