

Exercice 1: (2,5 points)

1) Les coordonnées polaires de K sont $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$

2) Soit A le point de coordonnées cartésiennes $(-2; -2\sqrt{3})$.

$$r_A = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos \theta = -\frac{2}{4} \\ \sin \theta = -\frac{2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

Les coordonnées polaires de A sont donc $\left(4; -\frac{2\pi}{3}\right)$

3) a) Soit B le point tel que $(\vec{OK}, \vec{OB}) = -\frac{7\pi}{12}$ et $OB = 4$.

$$(\vec{i}; \vec{OB}) = (\vec{i}; \vec{OK}) + (\vec{OK}; \vec{OB}) [2\pi] \text{ donc } (\vec{i}; \vec{OB}) = \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{12} = -\frac{4\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

Les coordonnées polaires de B sont $\left(4; -\frac{\pi}{3}\right)$.

b) OAB est isocèle car $r_A = r_B$ de plus $(\vec{OA}; \vec{OB}) = \theta_B - \theta_A = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ donc OAB est équilatéral.

Exercice 2: (2,5 points)

Résoudre l'équation ci-dessous et placer les solutions sur le cercle trigonométrique

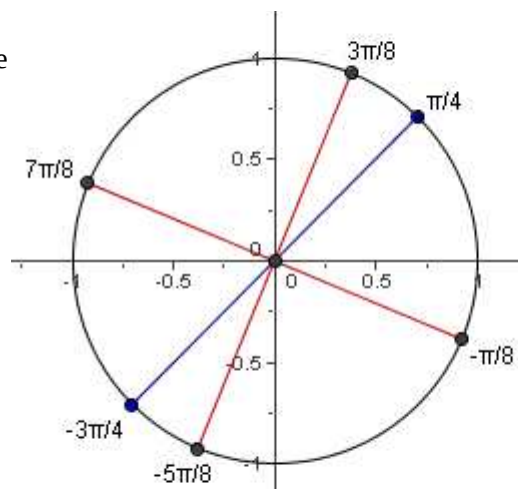
$$\cos(3x) = \sin\left(x + \pi\right) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \pi\right) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = -x - \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x = x + \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} [\pi]$$

Les solutions situées dans l'intervalle $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$ sont $-\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{8}$



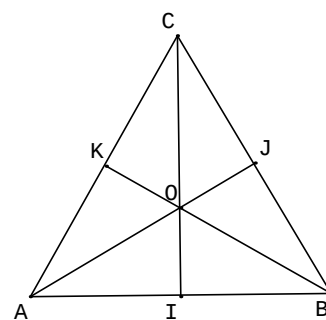
Exercice 3 : QCM (4 points)

Question 1. b)

$$\vec{AC} \cdot \vec{JB} = \vec{JC} \cdot \vec{JB} = -JC \times JB = -\frac{a^2}{4}$$

Question 2. c)

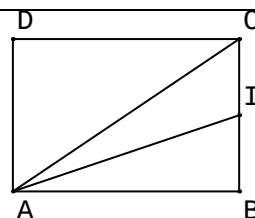
$$\vec{CB} \cdot \vec{CA} = CA \times CB \times \cos \frac{\pi}{3} = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$



Question 3. d)

$$AB^2 = 9 \text{ et } AC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AI} = \vec{AC} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{2} \vec{AC} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} AC^2 = \frac{9}{2} + \frac{13}{2} = 11$$



Question 4 c)

Exercice 4: (4 points)

1) Soit f la fonction définie sur $[-7; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+14}$

$$\text{Pour } x \geq -7 \text{ et } x \neq 1, t(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{2x+14} - 4}{x - 1} = \frac{(\sqrt{2x+14} - 4)(\sqrt{2x+14} + 4)}{(x - 1)(\sqrt{2x+14} + 4)} = \frac{2x + 14 - 16}{(x - 1)(\sqrt{2x+14} + 4)} = \frac{2x - 2}{(x - 1)(\sqrt{2x+14} + 4)} = \frac{2}{\sqrt{2x+14} + 4}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} t(x) = \frac{2}{\sqrt{2 \times 1 + 14} + 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{d'où } f \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } f'(1) = \frac{1}{4}$$

$$2) \quad f \text{ est dérivable sur }]-7; +\infty[\text{ car } f(x) \text{ est de la forme } \sqrt{ax+b} \text{ avec } ax+b > 0, \text{ et } f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+14}} = \frac{1}{\sqrt{2x+14}}$$

d'où $f'(1) = \frac{1}{4}$. Heureusement on trouve le même résultat avec les 2 méthodes !

$$3) \quad \text{Equation de la tangente à } C_f \text{ au point d'abscisse } 1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x - 1) + 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4}.$$

$$4) \quad \text{On a donc pour } x \text{ proche de } 1, f(x) \approx \frac{1}{4}x + \frac{15}{4} \text{ d'où } f(1,1) \approx 4,025.$$

$$f(1,1) = \sqrt{2 \times 1,1 + 14} = \sqrt{16,2}. \text{ L'erreur commise est } 4,025 - \sqrt{16,2} \approx 7,764 \times 10^{-5} < 10^{-4}$$

Exercice 5 : (5 points)

1) a) Pour x réel de $[0; 10]$, $A(x)$ est la somme des aires du carré de côté x et du carré de côté $(10-x)$. On a donc :

$$A(x) = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100.$$

b) A est dérivable sur $[0; 10]$ car c'est un polynôme, et $A'(x) = 2(2x - 10)$, binôme qui s'annule pour $x = 5$.

Ce tableau montre que $A(5)$ est le minimum de A sur $[0; 10]$

x	0	5	10
$A'(x)$	-	0	+
$A(x)$	100		100

On en déduit donc :

L'aire minimale de la surface au sol est 50 m^2

Remarque: A étant une fonction trinôme, on peut trouver son sens de variation sans la dérivée. (Voir chapitre « polynômes » !)

2) a) Pour x réel de $[0; 10]$, $V(x)$ est la somme des volumes de la pyramide et du cube. On a donc :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{3}x^3 + (10 - x)^3 = \frac{1}{3}x^3 + (10 - x)(10 - x)^2 = \frac{1}{3}x^3 + (10 - x)(100 - 20x + 100) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + 1000 - 300x + 30x^2 - x^3 = -\frac{2}{3}x^3 + 30x^2 - 300x + 1000. \end{aligned}$$

b) V est dérivable sur $[0; 10]$ (polynôme) et $V'(x) = -2x^2 + 60x - 300 = 2(-x^2 + 30x - 150)$.

Le signe de $V'(x)$ est le signe du polynôme du 2° degré $-x^2 + 30x - 150$ ($V'(x)$ est négatif « à l'extérieur » des racines et positif « à l'intérieur ».) $\Delta = 30^2 - 4(-1)(-150) = 900 - 600 = 300 = (10\sqrt{3})^2$ Ce trinôme a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-30 + 10\sqrt{3}}{-2} = 15 - 5\sqrt{3} \approx 6,3 \quad x_2 = 15 + 5\sqrt{3} \approx 23,7. \text{ D'où le tableau de variations :}$$

x	0	$15 - 5\sqrt{3}$	10
$V'(x)$	-	0	+
V	1000		$\frac{1000}{3}$

$V(15 - 5\sqrt{3})$ est donc le minimum de V sur $[0; 10]$

ce qui permet d'affirmer :

Le volume minimal des 2 stands est $V(15 - 5\sqrt{3}) \approx 134 \text{ m}^3$

4) A et V ne prennent pas leur valeur minimale pour la même valeur de x : 5 pour l'une et environ 6,3 pour l'autre.

Pour satisfaire au mieux les deux responsables, l'ingénieur peut prendre la valeur entière la plus proche de ces deux valeurs qui est $x = 6$.

Exercice 6 : (2 points)

On observe que les « sommets » de C_1 et de C_2 ont la même abscisse que les points d'intersection de C_3 et (Ox)

C_3 est donc la représentation graphique de la dérivée de l'une des 3 fonctions (donc C_3 n'est pas C_h). La comparaison des signes de l'une et des variations de l'autre montre que C_3 est la représentation graphique de la dérivée de la fonction représentée par C_1 (pour C_2 , ça ne « colle » pas !). A ce niveau soit C_2 est la représentation graphique de la dérivée de la fonction représentée par C_3 , soit C_1 est la représentation graphique de la dérivée de la fonction représentée par C_2 . La deuxième possibilité ne résiste pas à la comparaison des signes de l'une et des variations de l'autre. Nous avons donc établi que la seule possibilité est $C_1 = C_f$; $C_2 = C_h$ et $C_3 = C_g$.