Lycée Saint Sernin ~ Lundi 12 novembre 2001 ~ classes de première S ~ 2h
1er devoir commun de Mathématiques ~ Fonctions, polynôme, vecteurs, barycentre

EXERCICE I

Soit P et Q les polynômes définis sur ℝ par :
$P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ et $Q(x) = -x^2 + x - 1$, où a et b sont deux réels .

1- Peut-on déterminer a et b pour que P soit divisible par Q. [*Dire qu'un polynôme A est divisible par un polynôme B signifie qu'il existe un polynôme C tel que A = BC.*]

2- On suppose que $a = -2$. Déterminer toutes les valeurs du réel b telles que b soit racine de P

EXERCICE II

Soit A et B deux points distincts du plan, et a un réel. Lorsqu'il existe, on note G le barycentre des points pondérés (A ;a) et (B ;$a^2 - 7a + 12$).

1- Déterminer l'ensemble des valeurs du réel a telles que G existe.

2- Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles :
   - a- G est confondu avec A
   - b- G est confondu avec B
   - c- G est le milieu du segment [AB].
   - d- G est un point du segment [AB].

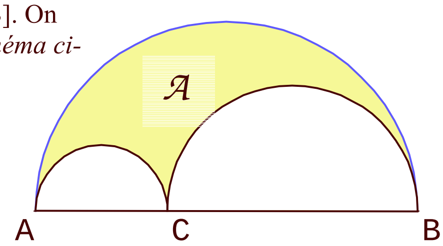
EXERCICE III

Le tableau de variation ci-contre est celui d'une fonction f sur laquelle on ne précise rien d'autre. En déduire les variations de la fonction $g = f^2$ sur l'intervalle [1 ; 3]. [*On rappelle que* f^2 *est le produit* $f \times f$ *, et on observera que* g *est la composée de* f *suivie de la fonction carrée*]

x	0		5		7
f	-1	↘	-4	↗	-2

EXERCICE IV

Soit un demi-cercle de diamètre AB = 5. On considère un point C du segment [AB]. On trace à l'intérieur de ce cercle les demi-cercles de diamètre [AC] et [CB]. [*Voir schéma ci-contre*]. On pose AC = x.



1- Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre le demi- cercle de diamètre [AB] et les demi-cercles de diamètres [AC] et [BC] (*surface ombrée du schéma*), peut s'exprimer en fonction de x par la relation :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\pi(5x - x^2) .$$

2- Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire $\mathcal{A}$ est-elle égale à $\frac{8}{25}$ de l'aire du demi-disque de diamètre [AB] ?

3- Déterminer pour quelle(s) position(s) de C l'aire $\mathcal{A}$ est maximale. [*on cherchera le maximum d'une fonction – à définir - sur un intervalle à préciser*]

EXERCICE V

ABC est un triangle dans lequel A', B' et C' désignent les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. Le point P est défini par l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1- Caractériser P comme barycentre de A et B affectés de coefficients à préciser

2- Utiliser des barycentres pour montrer que les droites (AA'), (B'C') et (CP) sont concourantes en un point G barycentre de (A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 1).

EXERCICE VI

ABC est un triangle. Le point I est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (C ; 1) ; le point J celui de (A ; 1) et (B ; 2) et enfin le point K celui de (C ; 1) et (B ; -4).

1. Faire une figure
2. Démontrer que B est barycentre de (K ; 3) et (C ; 1).
3. Déterminer le barycentre de (A ; 2), (K ; 3) et (C ; 1).
4. En déduire la position du point J par rapport aux points I et K.
5. Soit L le milieu du segment [CI] et M celui du segment [KC]. Déterminer des nombres réels a, b, c et d tels que le point L soit le barycentre de (A ; a) et (C ; b) et que le point M soit celui de (B ; c) et (C ; d).
6. a- Démontrer que le quadrilatère IJML est un parallélogramme.
   b- Montrer que le centre du parallélogramme IJML est l'isobarycentre des points A, B et C.