Lycée SAINT SERNIN **Devoir commun 1ère S - Durée 110 min**

06/02/2006

Exercice1 : *Question de Cours* (3 points)

Pré requis : • *Soit f une fonction définie sur un ensemble I et a un réel de I*

On dit que f est dérivable en a lorsque le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *admet une limite finie quand x tend vers a.*

• *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un ensemble I alors la fonction produit (uv) est dérivable sur I et pour tout réel a de I (uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)*

1) Soit u une fonction dérivable sur un ensemble I, et a un réel de I tel que $u(a) \neq 0$.

Montrer que la fonction $\frac{1}{u} : x \mapsto \frac{1}{u(x)}$ est dérivable en a et que $\left(\frac{1}{u}\right)'(a) = -\frac{u'(a)}{(u(a))^2}$

2) Soit u et v deux fonctions dérivables sur un ensemble I et a un réel de I tel que $v(a) \neq 0$.

Montrer que la fonction $\frac{u}{v} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable en a et que $\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a)-u(a)v'(a)}{(v(a))^2}$

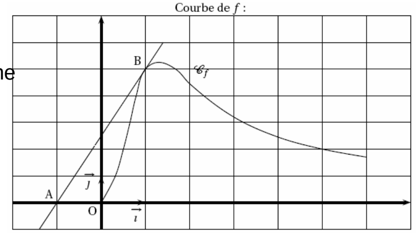
Exercice 2 : *Vrai – Faux*. (3 points)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.
Chaque réponse juste rapporte 0,75 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point, une non – réponse n'ajoute ni n'enlève de point. Si le total de l'exercice est négatif, la note est ramenée à zéro !

1. Soit la fonction f : x $\to x\sqrt{x}$ alors pour tout x de]0 ;+∞[, f'(x) =		
a) $3\frac{\sqrt{x}}{2}$	b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	c) $\frac{\sqrt{x}+x}{2\sqrt{x}}$
2. Si f(x) = cos(2x) alors pour tout réel x f'(x) =		
a) - sin(2x)	b) - 2sin(2x)	c) 2sin(2x)
3. Si la fonction f est définie et dérivable sur I =]-∞ ; 0[telle que pour tout réel de I, f'(x) < 0, alors		
a) f est négative sur I	b) f est décroissante et négative sur I	c) f est décroissante sur I
4. Si f'(x_0) = 0 alors		
a) f admet un extremum relatif en x_0	b) f admet un minimum relatif en x_0	c) On ne peut rien dire quant à l'existence d'un extremum relatif

Exercice 3 : (2,5 points)

Courbe de *f* :



La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction *f* définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 6].

Soit A le point du plan de coordonnées (−1;0) et B le point de la courbe C_f de coordonnées (1 ; 5).
La droite (AB) est la tangente à la courbe C_f au point B.
1. Déterminer l'équation réduite de le tangente à la courbe C_f au point B
Préciser *f '(1)*, où *f '* est la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; 6].
2. L'une des trois courbes C_1, C_2, et C_3 représentées sur les figures 1, 2 et 3 représente la fonction *f'*. Laquelle ? Justifier votre réponse.

Figure 1

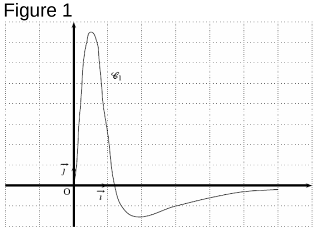


Figure 2

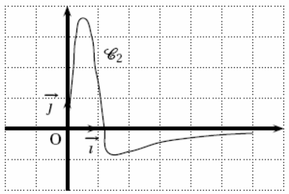
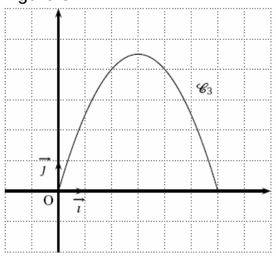
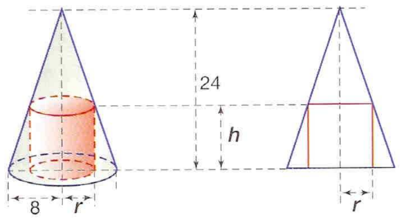


Figure 3



Exercice 4 : (4 points) *Cylindre inscrit dans un cône*



La hauteur d'un cône de révolution mesure 24 cm, et le rayon de la base, 8cm. On veut inscrire dans ce cône, un cylindre de révolution dont le volume soit le plus grand possible.
Le but de l'exercice est de déterminer les dimensions du cylindre, c'est-à-dire sa hauteur et le rayon de sa base pour que le volume soit maximal.

1. On note r le rayon de base et h la hauteur d'un cylindre inscrit dans le cône (r et h sont exprimées en cm).
   Démontrer que h = 24 – 3r, puis exprimer le volume V d'un tel cylindre en fonction de r.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $24\pi x^2 - 3\pi x^3$.
   a. Calculer f'(x)
   b. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis établir le tableau de variation de la fonction f.

3. Quelles doivent être les dimensions du cylindre inscrit dans le cône et dont le volume est le plus grand possible.

Exercice 5 : *Angles orientés* (5,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit M, N et P trois points du plan. Pour chacun d'eux, les coordonnées polaires (r ; θ) vérifient la relation $r = \frac{2}{\sin\theta}$. On donne • pour M , $\theta_M = \frac{\pi}{6}$; • pour N , $\theta_N = \frac{\pi}{4}$; • pour P , $\theta_P = \frac{\pi}{3}$

1) Calculer les rayons polaires r_M , r_N et r_P de chacun de ces trois points, puis les représenter sur une figure.

2) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points M , N et P.

   En déduire que les points M, N et P sont alignés sur une droite (d) que l'on précisera.

3) Donner, sans justification, les mesures en radians des angles $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$; $(\vec{u};\overrightarrow{ON})$; $(\vec{u};\overrightarrow{OP})$.

   Calculer les mesures en radians des angles $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$; $(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OP})$; $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OP})$;

   Donner, en justifiant, les mesures en radians des angles $(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MN})$; $(\overrightarrow{NM};\overrightarrow{NP})$.

4) Démontrer que pour tout réel θ de l'intervalle]0 ;π[, le point R de coordonnées polaires (r ; θ) tel que $r = \frac{2}{\sin\theta}$ est un point de la droite (d).

5) Réciproquement, démontrer que si S est un point de (d) alors ses coordonnées (r ; θ) vérifient $r = \frac{2}{\sin\theta}$

Exercice 6 : *Problème ouvert* (2 points)

Deux patineurs sur glace évoluent sur une piste circulaire.
Vincent et Thomas s'élancent au même instant du même point A, le premier dans le sens direct, le second dans le sens indirect.

Thomas tourne de $\frac{\pi}{6}$ radians en une seconde et Vincent tourne de $\frac{\pi}{5}$ radians en une seconde.

Combien de fois Thomas et Vincent vont-ils se croiser durant la première minute ?
Préciser les positions M_1 et M_2 de leurs deux premières rencontres.