LYCEE SAINT-SERNIN
SECOND DEVOIR COMMUN aux PREMIERES SCIENTIFIQUES
08 février 2002 ~ Durée 110 min

Exercice 1 : 6 points (2+0,5+1+1+1,5)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)= x^3-3x^2+4$. On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

1°) Calculer $f'(x)$, étudier sur $\mathbb{R}$ son signe et en déduire le tableau de variation complet de f.

2°) Déterminer les coefficients directeurs des tangentes à (C) aux points de (C) d'abscisses respectives 0 ; 1 et 2. On note (T) la tangente au point d'abscisse 1.

3°) Construire ces tangentes puis la courbe (C).

4°) Trouver les abscisses des points de (C) où la tangente est orthogonale à (T). Compléter le dessin du 3°).

5°) a)Montrer que :

$$x^3-3x^2-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}=(x-1)(x^2-2x-\frac{7}{3}).$$

b) Monter que de la droite (D) issue de A de coordonnées (1 ; 2) orthogonale à (T) admet pour équation $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

c) Déterminer les abscisses des points d'intersection de (C) et (D).

Exercice 2 : 4 points(0,5+2,5+1)

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1°) Indiquer les caractéristiques du cercle (C) défini par l'équation :

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

2°) On considère les points Q(2 ; -1) et P(6 ; 1) .

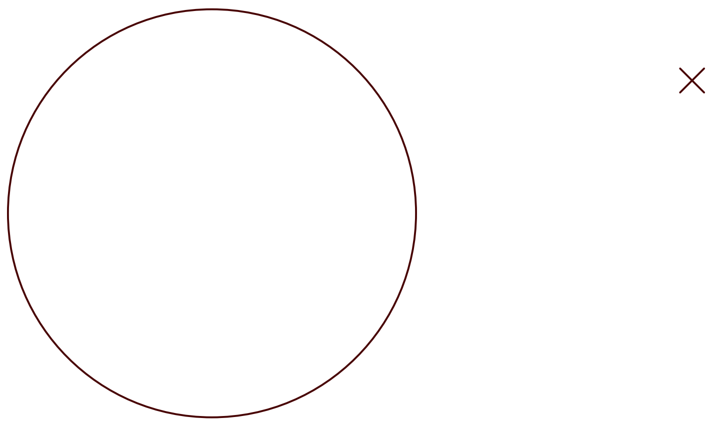
a) Déterminer une équation du cercle (C') de diamètre [QP].

b) *Cette question est indépendante de la suite de l'exercice.* Montrer que les points d'intersection K et L des cercles (C) et (C') sont sur la droite d'équation $y = 5-2x$. En déduire que les abscisses de K et L vérifient $5x^2 - 28x + 36 = 0$. Calculer alors les coordonnées de K et L.

c) Faites un dessin et expliquer pourquoi (KP) et (LP) sont tangentes à (C).

3°) APPLICATION

Recopier la figure suivante puis construire les tangentes au cercle issues du point marqué.



Exercice 3 : 6 points (partie A :0.5+0.5+0.5 ; partie B :0.5+0.5+1+0.5+0.5+0.5+1)

Partie A :

1. Résoudre l'équation $2\cos(x) + 1 = 0$ sur $[0 ;\pi]$.
2. A l'aide du cercle trigonométrique ou bien de la représentation graphique des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \frac{-1}{2}$, donner les solutions sur $[0 ; \pi]$ de $2\cos(x) + 1 \geq 0$.
3. En déduire le signe de $2\cos(x) + 1$ sur $[0 ; \pi]$.

Partie B :

Soit la fonction f telle que $x \to \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$ définie sur $[-\pi ;\pi]$ et sa courbe représentative (C).

1. Vérifier que f est bien définie sur $[-\pi ;\pi]$.
2. Montrer que f est impaire.

Dans la suite on limite l'étude de f à l'intervalle $[0 ;\pi]$.

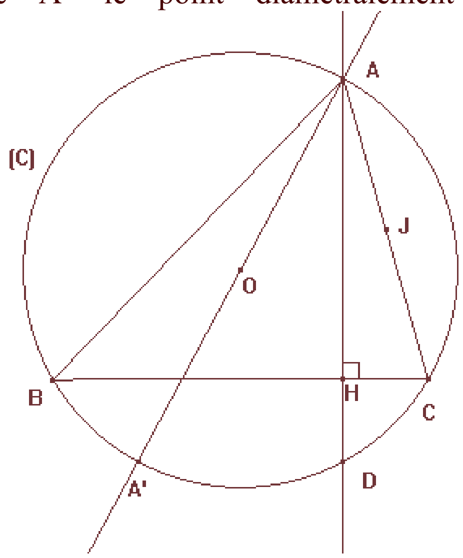
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2\cos(x)+1}{(2+\cos x)^2}$.
4. En utilisant la partie A, étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ;\pi]$.
5. Construire le tableau de variations de f sur $[0 ;\pi]$.
6. Calculer $f'(0)$ et $f'(\pi)$. Construire (C).

Exercice 4 : 4 points (0.5+0.5+1 ;0.5+1+0.5)

Soit ABC un triangle et soit (C) son cercle circonscrit ; la hauteur issue de A du triangle ABC coupe [BC] en H et (C) en D.

Le but de l'exercice est de montrer que la médiane issue de H du triangle HAC est aussi hauteur du triangle HBD.

On note A' le point diamétralement opposé à A et O le centre de (C).



1. Montrer que $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HO} - \overrightarrow{OA}$.
2. Justifier que $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'}$
3. En déduire que $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HD} = HO^2 - OA^2$ puis $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$.
4. Soit J le milieu de [AC] , montrer que $\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.
5. Conclure.